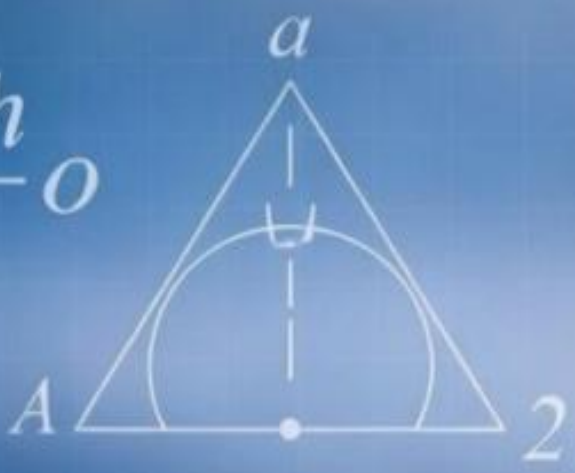
$$\sum \int t \quad \pi \quad a \int \frac{h}{a} o$$



MATHEMATICAL ANALYSIS

$$\int = {}^{\mu} al$$

AND

$$A = \frac{n+=^{n}}{2}$$

GEOMETRY

$$-{}^{l} \int \frac{g+2t}{g^2\ 1}$$

PATRIZIO GRAVANO 2025

Patrizio Gravano

Appunti di analisi e geometria

(stesura provvisoria)

Spazi vettoriali normati

E' dato un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale con ciò intendendo che il campo degli scalari può essere l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali oppure l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Una applicazione $\mathrm{N}: \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta norma quando $\forall\ (x, y) \in V \times V$ e $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ sono verificate le seguenti tre condizioni

$$\begin{cases} N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V \\ N(x, y) \leq N(x) + N(y) \end{cases}$$

Viene sovente fatto osservare (J. M. Monier, p.e.) che sostituendo allo scalare λ *nella relazione* $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *il valore* $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *si deduce N(0)*$= 0$. *Ciò innegabilmente è formalmente vero. Nel rivedere la manualistica (p.e Vaccaro, Carfagna, Piccollella) – anche atteso che la norma deve ricondursi – essendolo – alla logica delle applicazioni lineari pare ragionevole dare risalto alla relazione di corrispondenza compendiata – con riferimento al caso concreto – nella relazione* $N(\lambda 0_V) = 0_{\mathbb{R}}$ *la quale non è verificata solo per* $\lambda = 0$ *bensì per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Infatti deve essere vero che* $N(\lambda 0_V) = 0_{\mathbb{R}}\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$.

Deve ritenersi che sia $N(\lambda 0_V) = |\lambda| N(0_V) = 0\ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$.

Sostenere che $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *conduce a* $N(0) = 0\ \forall x \in V$ *non è errato in sé quando si afferma che per* $\lambda = 0$ *risulta* $\lambda x = 0_V$ *ma pare argomentazione fuorviante in parte qua fa ritenere che – con argomentazione algebricamente legittima – l'elemento* 0_V *sia generato da* $\begin{cases} \lambda x = 0_V \\ \lambda \equiv 0_{\mathbb{K}} \\ \forall x \in V \end{cases}$ *l'elemento nullo dello spazio vettoriale V non esista in sé ma sia per così dire generato premoltiplicando un elemento qualunque di V per lo scalare nullo del campo degli scalari.*

Non sembra neppure del tutto convincente l'argomentazione dei tre autori già citati che utilizzando il linguaggio proprio delle applicazioni lineari scrivono

$f(0_V) = 0_W$ *che viene dimostrata ponendo* $f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0 f(0_V) = 0_W$. *Infatti, per quanto già esposto non solo è vero che* $0 0_V = 0_V$ *ma è altresì vero che* $\lambda 0_V = 0_V$ *anche per* $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. *In definitiva si potrebbe legittimamente scrivere che Con riferimento al caso specifico delle norme* $f(0_V) = f(\lambda 0_V) = \lambda f(0_V) = 0_W$.

Riferendosi alle norme si dovrebbe – per come viene definita la norma – utilizzare il valore assoluto e si avrebbe una scrittura del tipo $N(0_V) = N(\lambda 0_V) = |\lambda| N(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$.

La relazione $N(0_V) = N(\lambda 0_V) = |\lambda| N(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$ *- essendo in generale* $|\lambda| \neq 0_{\mathbb{R}}$ *- impone dover ammettere* $N(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$ *che non ha significato di dimostrazione in quanto di per sé non prova che* $N(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$ *non essendo invocabile la proprietà di annullamento del prodotto in quanto l'eguaglianza* $|\lambda| N(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$ *è assunta a priori e costituisce l'oggetto della dimostrazione e non costrutto dimostrato !.*

Pare di interesse l'ipotesi di porre per via di definizione la relazione $N(0_V) = 0_{\mathbb{R}}$.

In definitiva, con riferimento ad una norma di uno spazio vettoriale all'elemento neutro 0_V *dello spazio vettoriale V è associato univocamente l'elemento* $0_{\mathbb{R}}$.

Per definizione sarebbe quindi $\begin{cases} N(0_V) = 0_{\mathbb{R}} \\ N(x) \neq 0_{\mathbb{R}} \ \forall x \ \in V : x \neq 0_V \end{cases}$.

Relativamente alle funzioni che hanno la caratteristica (godono cioè delle proprietà) delle norme quello che nel linguaggio tipico delle applicazioni lineari viene definito nucleo (c.d. kernel) cioè l'insieme degli elementi di V cui tramite f *corrisponde l'elemento* 0_W *coincide con l'elemento* 0_V.

Volendo mutuare tale terminologia si potrebbe irritualmente scrivere

$$Ker \, \|.\|_{r\,,X} = \{x \ \in V \, , \|x\|_{r\,,X} = 0_{\mathbb{R}}\} \equiv \{0_V\}$$

Ciò è coerente con il teorema per il quale c.n.e.s affinchè una applicazione lineare sia iniettiva è che $Ker \, f = \{0_V\}$.

In definitiva $\left(x \neq y \ \Rightarrow \|x\|_{r\,,X} \neq \|y\|_{r\,,X}\right) \Leftrightarrow Ker \, \|.\|_{r\,,X} = \{0_V\}$

E' evidente che non ogni norma è iniettiva. Ad esempio, l'ordinaria norma euclidea non è intendibile come una applicazione iniettiva (iniezione) in quanto esistono infiniti elementi distinti di $\mathbb{R}^n$ *- tutti quelli della frontiera di un aperto* $B(0,r)$ *per i quali sia* $x \neq y \ \Rightarrow \|x\|_{\partial B} = \|y\|_{\partial B} \ \forall (x,y) \in \ \partial B \times \partial B$, *essendo* ∂B *la frontiera dell'aperto B.*

Neppure è iniettiva la norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. *La dimostrazione della non iniettività di detta norma è immediata. Infatti, esistono infinite coppie di numeri (punti) opposti aventi la stessa norma. Se ad esempio si pone* $y = -x$ *risulta verificato che* $x \neq y = -x \ \Rightarrow \|x\|_{1\,,X} = \|y\|_{1\,,X}$.

Se si opera in $\mathbb{R}^n_+$ *la norma è iniettiva in quanto ogni elemento di detto spazio è formalizzabile come* $\begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n) \\ x_i \geq 0 \ \ \forall 1 \ \leq i \leq n \end{cases}$ *e la norma* $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ *è tale che affinchè due numeri*

$x, y\ di\ \mathbb{R}_+^n$ *siano distinti è sufficiente che esista almeno un* i *per il quale* $x_i \neq y_i$. *Poiché si tratta di una sommatoria discende la tesi.*

E' utile ritornare al precedente enunciato recante una condizione necessaria e sufficiente, quella che correla l'iniettività di una applicazione al nucleo (kernel) della stessa.

Nella definizione delle proprietà delle norme è stato evidenziato che $N(x_V) = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x_V = 0_V$. *Con ciò si deve intendere che* $N(x_V) \neq 0_{\mathbb{R}}\ \forall x_V \neq 0_V$. *Tale asserzione equivale a scrivere che* $Ker\ f = \{0_V\}$ *quando di consideri* $f \equiv N$ *cioè quando si ammetta che l'applicazione lineare* f *sia munita delle proprietà che definiscono una norma. Quindi calando il teorema (c.n.e.s. precedentemente enunciata) si desume che trattandosi di una condizione necessaria e sufficiente, come è ovvio, deve risultare vero che*

$$\left((x \neq y\ \Rightarrow \|x\|_{r,X} \neq \|y\|_{r,X}) \Leftrightarrow Ker\ \|.\|_{r,X} = \{0_V\}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} Ker\ \|.\|_{r,X} = \{0_V\} \Rightarrow (x \neq y\ \Rightarrow \|x\|_{r,X} \neq \|y\|_{r,X}) \\ (x \neq y\ \Rightarrow \|x\|_{r,X} \neq \|y\|_{r,X}) \Rightarrow Ker\ \|.\|_{r,X} = \{0_V\} \end{pmatrix}$$

Pertanto, poiché deve risultare $(x \neq y\ \Rightarrow \|x\|_{r,X} \neq \|y\|_{r,X}) \Rightarrow Ker\ \|.\|_{r,X} = \{0_V\}$ *occorre individuare lo spazio vettoriale che garantista la condizione* $(x \neq y\ \Rightarrow \|x\|_{r,X} \neq \|y\|_{r,X})$. *E' di tutta evidenza che, per esempio con riferimento alla ordinaria norma euclidea in* $\mathbb{R}^n$, *la condizione di iniettività non è verificata. Così ad esempio in* $\mathbb{R}^n$ *risulta che, ad esempio, ponendo* $x \neq y = -x$ *(quindi considerando un caso per cui è* $x \neq y$*) risulta* $\|x\|_{r,X} = \|y\|_{r,X}$ *dovendo quindi aversi* $Ker\ \|.\|_{E,\mathbb{R}^n} \neq \{0_V\}$ *contro l'ipotesi che si tratti di una norma per la quale, quindi valga la coinplicazione che* $N(x_V) = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x_V = 0_V$.

Vanno quindi esplorati aspetti specifici con riferimento alle norme integrali già introdotte.

Si consideri ad esempio la norma integrale $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$. *Tale norma è una applicazione iniettiva quando l'integrale definito (nel caso di specie numero reale non negativo) è inteso come una corrispondenza tra la funzione* $|f|$ *essendo* f *una generica funzione continua in* $[a\,,b]$, *ivi integrabile secondo Cauchy-Riemann. In questo caso evidentemente risulta vero che* $|f_1| \neq |f_2| \Rightarrow \int_a^b |f_1| \neq \int_a^b |f_2| \;\; \forall(|f_1|,|f_2|): (f_1, f_2) \in C^0_{[a\,,b]} \times C^0_{[a\,,b]}$, *essendo* $C^0_{[a\,,b]}$ *l'insieme i cui elementi sono le funzioni continue in* $[a\,,b]$.

Introdurre il punto critico di una definizione che contraddice l'assunto della iniettività

Fine parte intercalata il 31 gennaio 2025 h. 10. 08 p.m.

La coppia (V, N) è detta spazio vettoriale normato. Detta coppia non può essere intesa nel senso della unicità. Quindi dato uno spazio vettoriale V ad esso sono associabili distinti spazi (vettoriali) normati. Ogni funzione che fa corrispondere ad ogni elemento di V un elemento di $\mathbb{R}_0^+$ e che verifica le già ricordate proprietà (della norma) è una norma.

Per denotare una norma si utilizza ordinariamente uno dei due formalismi seguenti: $\|.\|$ oppure $\|.\|_V$.

Un formalismo ulteriore è assegnato con riferimento ad uno specifico criterio definitorio della norma di volta in volta considerato, come gli esempi seguenti evidenzieranno. Si tratta delle cosiddette norme standard che verranno ricordate nelle righe seguenti.

In generale lo schema che definisce operativamente una norma è il seguente.

$$\|.\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \;\; | \;\; \forall x \in V \;\; x \overset{\|.\|}{\rightarrow} \|x\| \in \mathbb{R}_0^+$$

In particolare, comunque sia definita la norma $\|.\|$ deve risultare

$$0_V \overset{\|.\|}{\rightarrow} \|0_V\| = 0_{\mathbb{R}}$$

Si osservi che λ può essere uno scalare reale, operando in un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale oppure può trattarsi di un numero complesso, avendo quindi un $\mathbb{C}-$ spazio vettoriale.

In ogni caso, se $\lambda = z \in \mathbb{C}$ risulta $|z| \in \mathbb{R}$.

Come già accennato, alcune norme sono dette standard.

La prima di esse è la seguente:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

In $\mathbb{R}^n$ detta norma, con riferimento ad un qualunque $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots., x_n)$ viene declinata come segue

$$\|x\|_{1,\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots .. + |x_n|$$

In questo caso la norma del vettore $\boldsymbol{x}$ è la somma dei moduli delle coordinate del punto considerato.

Occorre dimostrare che valgono le tre proprietà che definiscono una norma.

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ si hanno i seguenti passaggi formali

$$\|\lambda x\|_{1,\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \cdots .. + |\lambda x_n| = |\lambda||x_1| + |\lambda||x_2| + \cdots .. + |\lambda||x_n| = |\lambda|(|x_1| + |x_2| + \cdots .. + |x_n|) = |\lambda| \|x\|_{1,\mathbb{R}^n}$$

In definitiva $\|\lambda x\|_{1,\mathbb{R}^n} = |\lambda| \|x\|_{1,\mathbb{R}^n}$

Occorre poi dimostrare che $\|x\|_{1,\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Infatti

$\|0_{\mathbb{R}^n}\|_{1,\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}|0_k| = |0| + |0| + \cdots .. + |0| = 0$

Viceversa se $\|0_{\mathbb{R}^n}\|_{1,\mathbb{R}^n} = 0$ allora sarebbe $|x_1| + |x_2| + \cdots .. + |x_n| = 0$. Poiché si tratta di una somma di numeri reali positivi la condizione è verificata quando (e solo) risulta $|x_k| = 0$ identicamente $\forall k \ \in \{k \in \mathbb{N} - \{0\} : k \ \leq n \in \mathbb{N}\}$

Occorre, da ultimo, dimostrare che è verificata la cosiddetta diseguaglianza triangolare.

Per questa norma deve essere vero che

$$\|x + y\|_{1,\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_{1,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{1,\mathbb{R}^n}$$

Sviluppando i passaggi formali si ha

$$\|x\|_{1,\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}|x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots .. + |x_n|$$

$$\|y\|_{1,\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}|y_k| = |y_1| + |y_2| + \cdots .. + |y_n|$$

Sommando membro a membro si ha

$$\|x\|_{1,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{1,\mathbb{R}^n} = \ |x_1| + |x_2| + \cdots .. + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \cdots .. + |y_n|$$

Detta relazione può essere riscritta ponendo

$$\|x\|_{1,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{1,\mathbb{R}^n} = (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) + \cdots . + (|x_n| + |y_n|)$$

Il primo membro della relazione $\leq$ può essere scritto come segue

$$\|x + y\|_{1,\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}|x_k + x_k| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots . + |x_n + y_n|$$

E' di tutta evenienza che poiché $(x_k, x_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ risulta identicamente vero al variare di k in $\{k \in \mathbb{N} - \{0\} : k \ \leq n \in \mathbb{N}\}$ sono vere le seguenti relazioni

$$|x_k + x_k| \leq |x_k| + |y_k|$$

E’ altrettanto evidente che fosse $(x_k, x_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ allora sarebbe identicamente vero che $|x_k + x_k| = |x_k| + |y_k|$.

La condizione di eguaglianza è altresì soddisfatta al verificarsi della condizione $(x_k, x_k) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$, introducendo quindi una restrizione all’insieme del numeri reali negativi.

Dal che – con riferimento al caso generale esaminato – è immediatamente verificata anche la validità della terza proprietà della norma (recte: affinchè la funzione considerata sia una norma).

Una ulteriore norma standard è la cosiddetta norma euclidea ordinaria definita dalla condizione $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, operando quindi in un $\mathbb{R} -$ spazio vettoriale.

Nello spazio ad n dimensioni essa risulta essere formalizzata ponendo

$$\|x\|_{2,\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

Per esempio, in $\mathbb{R}^3$, si può scrivere

$$\|x\|_{2,\mathbb{R}^3} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i)^2} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} \geq 0$$

Poiché si opera in un $\mathbb{R} -$ spazio vettoriale, con riferimento al caso generale, per $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ deve risultare

$\|\alpha x\|_{2,\mathbb{R}^n} = |\alpha| \|\alpha x\|_{2,\mathbb{R}^n}$. Infatti, da $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ da cui si ottiene

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

$\|\alpha x\|_{2,\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha^2(x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2} =$

$|\alpha|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = |\alpha|\|x\|_{2,\mathbb{R}^n}$

Pertanto $\|\alpha x\|_{2,\mathbb{R}^n} = |\alpha|\|x\|_{2,\mathbb{R}^n}$

Se si considera lo zero di $\mathbb{R}^n$ si può porre $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots\ldots, 0)$

Pertanto $\|0_{\mathbb{R}^n}\|_{2,\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(0_i)^2} = 0$. Tale relazione è da intendere che se si considera l'elemento $0_{\mathbb{R}^n}$ il corrispondente valore reale è $0_{\mathbb{R}^1}$.

Viceversa se si pone per ipotesi $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = 0$, poiché le quantità x_i^2 sono tutte non negative, risultando quindi $x_i^2 \geq 0$ allora deve essere identicamente vero che $x_i^2 = 0$ quindi $x_i = 0$, identicamente al variare di i.

Al momento si è quindi evidenziato che si tratta di una seminorma.

Occorre quindi verificare che valga la proprietà detta diseguaglianza triangolare, al fine di poter definire la data funzione come una norma.

occorre dimostrare che $\|x + y\|_{2,\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_{2,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{2,\mathbb{R}^n}$.

Con riferimento al caso concreto tale relazione può essere scritta come segue

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}$$

Si tratta evidentemente di quantità positive, per la condizione di realtà del radicale, quindi elevando al quadrato si ha

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}$$

Da cui, sviluppando il primo membro, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}$$

Da cui si ha

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}$$

Se risulta $(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i)\geq 0$ è possibile elevare al quadrato ambo i membri ottenendo

$$\left((\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i)\right)^2\leq(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2)(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2)$$

Ma in $\mathbb{R}$ il primo membro può essere riscritto ponendo

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2$$

In definitiva in questo caso particolare il primo membro è equivalente al secondo membro e si può scrivere

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i)^2}$$

quando $(\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \sum_{i=1}^{n} y_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ o anche quando $(\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \sum_{i=1}^{n} y_i) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$

Il terzo caso di norma standard è quella definita ponendo

$\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = Max\ |x_k|$

Per esempio in $\mathbb{R}^2$ detta norma è declinabile come segue

$\forall x \ \in \mathbb{R}^2$ si ha $\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^2} = max(|x_1|, |x_2|)$

Occorre ora evidenziare che con riferimento a $\mathbb{R}^n$ la funzione $\|.\|_{\infty,\mathbb{R}^n} : \ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale $x \xrightarrow{\|.\|_{\infty,\mathbb{R}^n}} \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}$ è una norma.

Occorre dimostrare che $\|\alpha x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |\alpha|\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n}\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$. Per come è definita la funzione considerata si può porre $\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = Max\ |x_k|$ dove $Max\ |x_k|$ è una rappresentazione sintetica per denotare $\max(|x_1|, |x_2|, \ldots., |x_n|)$.

Se $Max\ |x_k| = \beta$ si ha che $Max\ |\alpha x_k| = |\alpha||x_k| = |\alpha|\beta$ con $\beta \geq 0$.

Ciò comprova che $\|\alpha x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |\alpha|\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n}\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Se $x = 0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots.,0)$ si ha $\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = Max\ |x_k| = max|0| = 0$.

Vale anche il contrario. Infatti se $max\ |x_k| = 0$ allora poiché $|x_k| \geq 0$ risulta che $\begin{pmatrix} max\ |x_k| = 0 \\ |x_k| \geq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_k = 0$ identicamente, cioè vera $\forall k : 1 \leq k \leq n$.

In definitiva si è evidenziato che $\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Quanto detto evidenzia il carattere di seminorma della funzione $x \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty,\mathbb{R}^n}} \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}$

Per evidenziare il carattere di norma di detta funzione occorre evidenziare il valere della diseguaglianza triangolare che con riferimento al caso concreto può essere scritta come segue

$$\|x + y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$$

Tale relazione è interpretabile come segue

$$\|x + y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = max|x_i + y_i|$$

Possono essere fatte osservazioni intuitive a partire dalla condizione

$\|x + y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$ che può essere riscritta ponendo

$max|x_i + y_i| \leq max|x_k| + max|y_j|$ che nel caso più generale deve valere per $i \neq k \neq j$.

Ammettiamo che la relazione d'ordine sia verificata per $i = k = j$ nel senso che $\|x + y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |x_i + y_i|$, $\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |x_i|$ e $\|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |y_i|$ dove $i = i_0$ deve considerarsi dato. Una delle condizione per la quale valga la relazione di eguaglianza è alquanto restrittiva, potendosi, ad esempio, scrivere che

$$\begin{pmatrix} \|x + y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |x_i + y_i| \\ \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |x_i| \\ \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |y_i| \\ i = i_0 \\ (x_i, y_i) \notin \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_- \\ (x_i, y_i) \notin \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \|x + y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$$

A titolo esemplificativo una ulteriore condizione di eguaglianza potrebbe essere quella per la quale

$$\left(\begin{array}{c} \|x+y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |x_i + y_i| \\ \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |x_j| \\ \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = |y_k| \\ i \neq j \neq k \\ x_i = x_j \\ (x_i\,, x_j) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ y_i = y_k \\ (y_i\,, y_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \end{array}\right) \Leftrightarrow \|x+y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$$

Ai fini della trattazione generale di questo caso potrebbe, ad esempio, ipotizzarsi di studiare la relazione $\|x+y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} > \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$ evidenziando che assunta essa vera per ipotesi sorge una contraddizione per la quale risulta evidente che

$(\|x+y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} > \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$ è $falsa\,) \Rightarrow (\,\|x+y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$ è $vera)$

Sia $\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = a$ e sia $\|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = b$ con $a \geq 0, b \geq 0$.

Deve però essere vero che

$\|x+y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = max|x_k + y_k| = |max\ x_k + max\ y_k|$ quando $x_k \geq 0,\ y_k \geq 0$. Si può porre $max\ x_k = x_j$ e $max\ y_k = x_t$.

Può risultare possibile solo $max\ x_k \leq a$ e $max\ y_k \leq b$.

Infatti, fosse, ad esempio, vero che $max\ x_k = x_j > a$ sarebbe falsa l'assunzione $\|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} = a$.

Date le due possibili relazioni $\begin{cases} max\ x_k = x_j \leq a \\ max\ y_k = x_t \leq b \end{cases}$ è possibile sommare membro a membro e scrivere che $max\ x_k + max\ y_k = x_j + y_j \leq a + b$.

Se $0 \leq max\ x_k + max\ y_k \leq a + b$ si può scrivere che

$max\ x_k + max\ y_k = |max\ x_k + max\ y_k| = max|x_k + y_k| = \|x + y\|_{\infty,\mathbb{R}^n} \leq a + b = \|x\|_{\infty,\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\infty,\mathbb{R}^n}$

Non si tratta però del caso generale per il quale ben può essere $max\ x_k + max\ y_k < 0$.

Se è vero che $max|x_k + y_k|$ essendo $x_j + y_j < 0$ si può scrivere che

$max|x_k + y_k| = -(x_j + y_j) > 0$.

Deve pertanto essere vero che

$0 \leq -(x_j + y_j) \leq a + b$

$0 \leq (-1)(x_j + y_j) \leq a + b$

Elevando al quadrato si ha

$0 \leq \big((-1)(x_j + y_j)\big)^2 \leq (a + b)^2$ da cui si ottiene $0 \leq (x_j + y_j)^2 \leq (a + b)^2$.

Sviluppando i quadrati si ha $0 \leq x_i^2 + y_i^2 + 2(x_j y_j) \leq a^2 + b^2 + 2ab$.

E' di tutta evidenza che deve essere $x_i^2 + y_i^2 + 2(x_j y_j) < a^2 + b^2 + 2ab$ quando $\begin{cases} x_i < a \\ y_i < b \end{cases}$ cioè quando $x_i + y_i < a + b$ vera anche quando $x_i + y_i < 0$ dovendo essere $a + b > 0$.

Dal punto di vista terminologico occorre precisare che se

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la norma $\| \, . \, \|_2$ è detta euclidea usuale o standard;

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la norma $\| \, . \, \|_2$ è detta hermitiana canonica, in onore del matematico francese Charles Hermitte.

Tra ne norme di interesse deve essere ricordata la norma di Hölder.

Sia $p \in [1, +\infty[$ e sia $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

La norma di Hölder è ordinariamente indicata scrivendo $\| \, . \, \|_p$ e quindi considerando la funzione per la quale

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \xrightarrow{\| \, . \, \|_p} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$$

n è la dimensione dello spazio vettoriale considerato.

Occorre dimostrare che la funzione $\| \, . \, \|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$.

Che si tratti di una seminorma è di immediata verifica. Infatti, è immediato evidenziare che

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \xrightarrow{\| \, . \, \|_p} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |k x_k|^p} = (|k|) \left(\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p} \right) = |k| \| x \|_p$$

In definitiva si è evidenziato che $\| kx \|_p = |k| \| x \|_p$

E' di tutta evidenza che se $x = 0_{\mathbb{K}^n}$ allora $\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p} = 0$ in quando $x_k = 0$ identicamente in quando $0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, 0, \dots, 0)$. Al solito la presenza del modulo permette di affermare che $|x_k|$ è sempre positivo.

Pertanto se $\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p} = 0$ (ipotesi) deve essere vero (identicamente) che $|x_k| = 0$, quindi $x_k = 0$.

Occorre, affinchè si possa dire che la funzione considerata sia una norma, che sia altresì verificata la c.d. diseguaglianza triangolare.

Deve essere dimostrato che

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p}$$

Se p è un intero assoluto è possibile utilizzare il teorema del binomio di Newton osservando che tutti i termini dello sviluppo del binomio (a secondo membro) sono strettamente positivi.

Ammessa vera la precedente diseguaglianza – *a fortiori* – deve risultare vero che

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n}|x_k|^p + \sum_{k=1}^{n}|y_k|^p$$

La relazione trovata è una forma compatta per definire n relazioni del tipo

$$|x_k + y_k|^p \leq |x_k|^p + |y_k|^p$$

al variare di $k\ in\ \{1, 2, 3, \dots., n\}$.

Se $(x_k\ , y_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ oppure se $(x_k\ , y_k) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ risulta $|x_k + y_k|^p = |x_k|^p + |y_k|^p$ risultando rilevante – con riferimento al caso $(x_k\ , y_k) \in$

$\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ che si ha comunque a che fare con reali non negativi in quanto $|x_k|^p = (|x_k|)^p \geq 0 \; \forall p \in [1, +\infty[$.

E', ad esempio, al limite sufficiente $\exists\, i : y_i < 0$ quando identicamente $x_k \geq 0$ con $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ per poter scrivere $|x_i + y_i|^p < |x_i|^p + |y_i|^p$ risultando $|x_k + y_k|^p = |x_k|^p + |y_k|^p \; \forall k \in \{1, 2, \dots, , \dots, n\} - \{i\}$ essendo $\{1, 2, \dots, , \dots, n\} \cap \{i\} = \{i\}$.

Sono state in concreto evidenziate le proprietà che fanno della funzione di $H\ddot{o}lder$ una norma.

Sia X un insieme non vuoto e sia B l'insieme i cui elementi sono le funzioni limitate di X in $\mathbb{K}$.

(B, + , ·) è uno spazio vettoriale. Siano date due qualunque funzioni limitate f_i e f_j $(i \neq j)$, quindi elementi di B. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ le funzioni $\alpha f_i + \beta f_j$ sono limitate, quindi $(\alpha f_i + \beta f_j) \in B$.

Ciò significa che B munito delle due operazioni binarie $+ \, e \, \cdot$ è uno spazio vettoriale sul quale può essere introdotta la norma $\|.\|_\infty$.

Pertanto può essere introdotto lo spazio vettoriale normato $((\mathrm{B}, +, \cdot), \|.\|_\infty)$.

È però necessario dimostrare che

$\|.\|_{X,\infty} : f_i \xrightarrow{\|.\|_{X\infty}} \sup_{x \in X} |f_i(x)|$ è una norma.

Occorre evidenziare che tale funzione gode delle tre proprietà che la caratterizzano per essere una norma.

Infatti, $\forall f_i \in B, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$\sup_{x\in X}|\lambda f_i(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X}|f_i(x)|$$

E' di tutta evidenza che $\sup_{x\in X}|f_i(x)| = 0 \Leftrightarrow f_i(x) = 0$ identicamente $\forall x \in X$.

Occorre, da ultimo, evidenziare che

$\forall(f_i, f_j) \in B \times B : i \neq j$ deve essere vero che

$$\sup_{x\in X}|f_i(x) + f_j(x)| \leq \sup_{x\in X}|f_i(x)| + \sup_{x\in X}|f_j(x)|$$

Si osserva che anche nel caso più semplice, quello per il quale $\begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \end{cases}$ non necessariamente esiste un $\bar{x}$ per il quale per entrambe le funzioni limitate in X risulti vero che

$$\begin{cases} \sup_{x\in X}|f_1(x)| = f_1(\bar{x}) \\ \sup_{x\in X}|f_2(x)| = f_2(\bar{x}) \end{cases}.$$

Nel caso *de quo* si può porre $\begin{cases} \sup_{x\in X} f_1(x) = f_1(\bar{x}) \\ \sup_{x\in X} f_1(x) = f_2(\bar{x}) \end{cases}.$

Ebbene anche in questo caso particolare $\left(\begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \end{cases}\right)$ non è necessariamente vero che $\exists\, \bar{x} \in X \begin{cases} \sup_{x\in X} f_1(x) = f_1(\bar{x}) \\ \sup_{x\in X} f_1(x) = f_2(\bar{x}) \end{cases}.$

E' pacifico, infatti, che la condizione $\begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \end{cases}$ può convivere con l'ulteriore

$\begin{cases} \sup\limits_{x \in X} |f_1(x)| = f_1(\overline{x_1}) \\ \sup\limits_{x \in X} |f_2(x)| = f_2(\overline{x_2}) \end{cases}$ con $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$.

Nel primo caso considerato

$$\left(\begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \end{cases} : \exists\, \bar{x} \in X \mid \begin{cases} \sup\limits_{x \in X} f_1(x) = f_1(\bar{x}) \\ \sup\limits_{x \in X} f_1(x) = f_2(\bar{x}) \end{cases} \right)$$

La relazione $\sup\limits_{x \in X} |f_1(x) + f_2(x)| \leq \sup\limits_{x \in X} |f_1(x)| + \sup\limits_{x \in X} |f_2(x)|$

può essere riscritta ponendo

$|f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})| = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})$ e quindi

$f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})$

Nel caso $\left(\begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \end{cases} : \begin{cases} \sup\limits_{x \in X} |f_1(x)| = f_1(\overline{x_1}) \\ \sup\limits_{x \in X} |f_2(x)| = f_2(\overline{x_2}) \end{cases} \text{ con } \overline{x_1} \neq \overline{x_2} \right)$

Si può scrivere che $\sup\limits_{x \in X} |f_1(x) + f_2(x)| \leq f_1(\overline{x_1}) + f_2(\overline{x_2})$.

Sia $\bar{x} \in X$: $\sup\limits_{x \in X} |f_1(x) + f_2(x)| = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})$

Nel caso generale – riferito peraltro al caso di funzioni non negative in X – occorre porre $\bar{x} \neq \overline{x_1} \neq \overline{x_2}$.

Sotto queste condizioni deve essere $\begin{cases} f_1(\bar{x}) \leq f_1(\overline{x_1}) \\ f_2(\bar{x}) \leq f_2(\overline{x_1}) \end{cases}$

(Si osservi l'esigenza di scrivere le relazioni utilizzando $\leq$ in luogo di $<$ per ragioni di generalità, pensando ad esempio al caso di funzioni crescenti ma non strettamente.)

Sommando $\begin{cases} f_1(\bar{x}) \leq f_1(\overline{x_1}) \\ f_2(\bar{x}) \leq f_2(\overline{x_1}) \end{cases}$ membro a membro si ottiene

$$f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \leq f_1(\overline{x_1}) + f_2(\overline{x_1})$$

Trattandosi di funzioni non negative in X allora si può scrivere che

$$\left(f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \leq f_1(\overline{x_1}) + f_2(\overline{x_1})\right) \Rightarrow \left(|f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})| \leq f_1(\overline{x_1}) + f_2(\overline{x_1})\right)$$

Per quanto posto è quindi possibile scrivere che

$$\sup_{x \in X} |f_1(x) + f_2(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_1(x)| + \sup_{x \in X} |f_2(x)|$$

Occorre, per gli sviluppi, ricordare le proprietà della funzione valore assoluto $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$.

Con riferimento alle funzioni reali di una variabile reale risulta che

$$|f(x)| = f(x) \text{ se } f(x) > 0$$

$$|f(x)| = 0 \text{ se } f(x) = 0$$

$$|f(x)| = -f(x) \text{ se } f(x) < 0$$

Pare di interesse ricordare che $|f(x)| = -f(x)$ se $f(x) < 0$ che può essere riscritta ponendo $-|f(x)| = f(x)$ quando $f(x) < 0$.

In generale se si considera una funzione $f_i(x)$ continua e limitata in X essa – nel caso più generale – assume valori sia positivi che negativi che eguali a 0.

Occorre ora riferirsi al caso per il quale risulti, per ipotesi, che

$$\begin{cases} \sup_{x\in X}|f_1(x)| = |f_1(\overline{x_1})| \\ \sup_{x\in X}|f_2(x)| = |f_2(\overline{x_2})| \end{cases}$$

Sia $\bar{x} \neq \overline{x_1} \neq \overline{x_2}$ tale che $\bar{x} \in X$ per il quale sia

$$\sup_{x\in X}|f_1(x) + f_2(x)| = |f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})|$$

Per quanto posto si ha $\begin{cases} |f_1(\bar{x})| \leq |f_1(\overline{x_1})| \\ |f_2(\bar{x})| \leq |f_2(\overline{x_2})| \end{cases}$.

Sommando membro a membro si ha

$$|f_1(\bar{x})| + |f_2(\bar{x})| \leq |f_1(\overline{x_1})| + |f_2(\overline{x_1})|$$

Si osserva che il primo membro contiene comunque la somma di due numeri reali non negativi. In generale in $\mathbb{R}_0^+$ risulta di tutta evidenza che

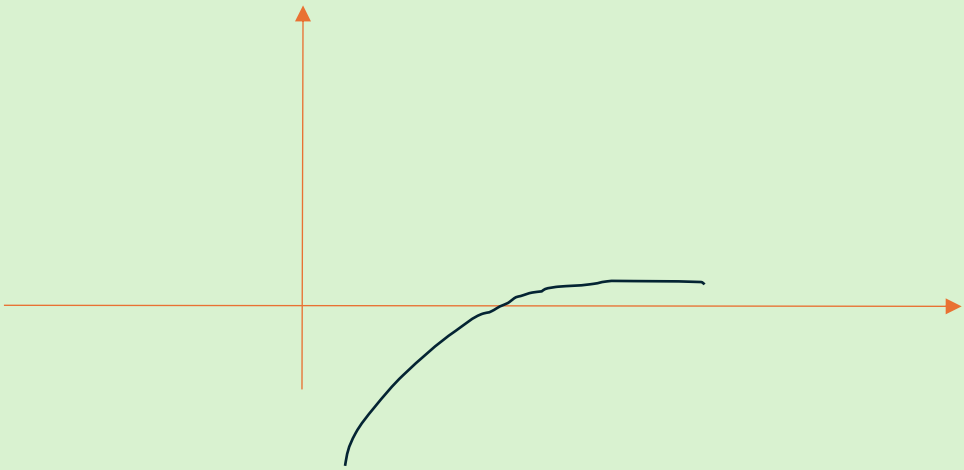
$$|r_1| + |r_2| = \big||r_1| + |r_2|\big| \; \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Si può scrivere

$$\big||f_1(\bar{x})| + |f_2(\bar{x})|\big| \leq |f_1(\overline{x_1})| + |f_2(\overline{x_2})|$$

Occorre ritornare alla precedente osservazione relativa all'uso del simbolo di valore assoluto.

Si consideri una funzione limitata $f(x)$ come quella della figura seguente.



Si consideri X $\subset \mathbb{R}$ tale che $dom\ f = X$.

Con riferimento al caso concreto si osserva che la funzione è negativa in un certo tratto e positiva nel tratto seguente.

E' ben evidente che in questo caso si può scrivere $\sup_{x\in X}|f(x)| = -\inf_{x\in X} f(x)$

Sia, come già detto, $\bar{x} \in X \ \mid \ \sup_{x\in X} |f_1(x) + f_2(x)| = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})$

Se $f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) > 0$ allora si può scrivere

$$\sup_{x\in X}|f_1(x) + f_2(x)| = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = |f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})|$$

Allora risulta

$$f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \leq f_1(\overline{x_1}) + f_2(\overline{x_2})$$

Ciò deriva da $f_1(\bar{x}) \leq f_1(\overline{x_1})$ e da $f_2(\bar{x}) \leq f_2(\overline{x_2})$

In definitiva

$\sup_{x\in X} |f_1(x) + f_2(x)| = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \leq f_1(\overline{x_1}) + f_2(\overline{x_2}) = \sup_{x\in X}|f_1(x)| + \sup_{x\in X}|f_2(x)|$

Quindi $\sup_{x\in X} |f_1(x) + f_2(x)| \leq \sup_{x\in X}|f_1(x)| + \sup_{x\in X}|f_2(x)|$

Per l'esame degli ulteriori casi possibili sembra dirimente tenere in considerazione quanto segue.

Sia $\bar{x} \in X$ per il quale sia $f(\bar{x}) < 0$ tale che sia $\sup_{x\in X}|f(x)| = -f(\bar{x}) = |f(\bar{x})|$

. $\sup_{x\in X}|f(x)| = -f(\bar{x})$ è assunto per ipotesi. Quello ipotizzato è il caso della funzione di cui alla precedente rappresentazione grafica.

La seconda eguaglianza è immediata in quanto deve essere $\sup_{x\in X}|f(x)| \geq 0$ in quanto la funzione $|f(x)|$ è costantemente non negativa anche con riferimento ai tratti eventualmente negativi della funzione $f(x)$.

(In generale $-(-\alpha) = \alpha \in \mathbb{R}_+$ quando $\alpha \in \mathbb{R}_+$).

Utilizzando nota proprietà della funzione valore assoluto si può affermare che

$$\sup_{x\in X}|f(x)| = |f(\bar{x})| = \begin{cases} 0 \ se f(\bar{x}) = 0 \\ f(\bar{x}) \ se \ f(\bar{x}) > 0 \\ -f(\bar{x}) \ se \ f(\bar{x}) < 0 \end{cases}$$

Conseguentemente si può porre

$$\sup_{x\in X}|f_1(x) + f_2(x)| = |f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})| = \begin{cases} 0 \ se \ f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) = 0 \\ f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \ se f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) > 0 \\ -(f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})) \ se f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) < 0 \end{cases}$$

Il primo caso è di tutta evidenza in quanto

$$\sup_{x\in X} |f_1(x) + f_2(x)| = |f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})| = 0 \leq |f_1(\overline{x_1})| + |f_2(\overline{x_2})|$$

E' stata ottenuta una relazione con ogni evenienza vera in quanto $0 \leq |f_1(\overline{x_1})| + |f_2(\overline{x_2})|$ essendo il secondo membro costituito da due numeri reali non negativi.

(Fosse $|f_1(\overline{x_1})| = |f_2(\overline{x_2})| = 0$ sarebbe $0 \leq 0$ e in definitiva $0 = 0$)

Gli altri casi sembrano meno immediati ma la logica dimostrativa pare non confutabile e gli esiti devono ritenersi ottenibili per mera manipolazione algebrica.

A titolo di esempio, il secondo caso possibile

$$\sup_{x\in X} |f_1(x) + f_2(x)| = |f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x})| = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \; se f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) > 0$$

è riconducibile a due sottocasi, uno dei quali, quello per il quale $f_1(\bar{x}) > 0 \; e \; f_2(\bar{x}) > 0$, è stato trattato.

Restano da considerare le ipotesi (sono infatti in realtà due) per le quali $\begin{cases} f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) > 0 \\ f_1(\bar{x}) > 0 \\ f_1(\bar{x}) < 0 \end{cases}$

o $\left(\begin{cases} f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) > 0 \\ f_1(\bar{x}) < 0 \\ f_1(\bar{x}) > 0 \end{cases} \right)$

Questa parte deve essere sviluppata compiutamente.

Gli esempi fatti non esauriscono il novero il novero delle funzioni che hanno le proprietà di una norma.

Sia infatti dato l'intervallo $(a\,, b) \subset \mathbb{R}$ e sia I l'insieme i cui elementi sono le funzioni a valori di $\mathbb{K}$.

Possono essere introdotte le due seguenti norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$$

Con riferimento alla prima delle due funzioni (dovendo dimostrare che si tratta di norme) la scrittura $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$ deve essere intesa come la funzione che associa alla funzione $f \in I = C([a,b],\mathbb{K})$ il numero reale $\int_a^b |f|$.

In termini sintetici si può scrivere

$$\|.\|_1 : f \in I \xrightarrow{\|.\|_1} \int_a^b |f| \in \mathbb{R}$$

$|f|$ è una funzione composta secondo lo schema $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{|.|} |f(x)| = g(x)$

La scrittura $\int_a^b |f|$ è una forma più compatta equivalente a $\int_a^b |f(x)|dx$.

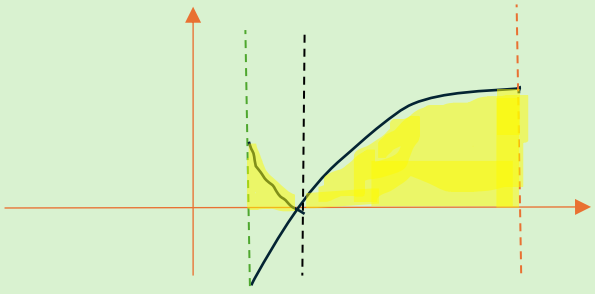
Occorre dimostrare che sono verificate le tre proprietà per le quali una funzione possa essere considerata una norma.

Se $f \in I$ anche la funzione $\alpha f \in I \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$. Si può pertanto scrivere che

$$\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha f| = \int_a^b |\alpha||f| = |\alpha| \int_a^b |f| \in \mathbb{R}_0^+$$

È immediato ammettere che $\int_a^b |f| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ identicamente in $[a\,,b]$.

Infatti, $\int_a^b |f| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ in quanto ogni funzione integrabile secondo Riemann detto integrale è l'area (positiva) regione piana delimitata dall'asse delle ascisse e dalla curva $|f(x)|$ entro i limiti di integrazione.



Se $|f| \neq 0$ allora $\int_a^b |f| = 0$

$\int_a^b |f| = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ identicamente in $[a, b]$.

La seguente è obiezione ammissibile ?

Sia $f(x) = \begin{cases} k \neq 0 \; per \; x = x_0 : x_0 \in [a, b] \\ 0 \;\; \forall \, x : x \in \{[a, b] - \{x_0\}\} \end{cases}$

Per essa sarebbe $\int_a^b |f| = 0 \;\; \nRightarrow |f(x)| = 0 \nRightarrow f(x) = 0$ identicamente in $[a, b]$.

Con riferimento alle proprietà delle metriche vale anche l'implicazione inversa data da

$f(x) = 0$ identicamente in $[a, b] \Rightarrow \int_a^b |f| = 0$. Infatti, da $f(x) = 0$ si ha $\int_a^b |f| = \int_a^b |0| = \int_a^b 0 \cdot dx = 0 \int_a^b dx = 0(b - a) = 0$

Siano f e g due funzioni continue integrabili secondo Riemann.

Di può considerare la somma $\int_a^b |f| + \int_a^b |g|$.

Occorre dimostrare che $\int_a^b |f + g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$.

E' di tutta evidenza che in essa vale il segno di eguaglianza, potendo quindi scrivere

$\int_a^b |f + g| = \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$ in specifici casi quali i seguenti

$$\begin{cases} f \equiv g \\ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ in } [a\,, b] \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Se $f = -g$ in $[a\,, b]$ si ha $\int_a^b |-g + g| \leq \int_a^b |-g| + \int_a^b |g|$ da cui $\int_a^b |0| \leq \int_a^b |-1||g| + \int_a^b |g|$ da cui $0 \leq 2 \int_a^b |g|$.

Nel caso $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ in $[a\,,b\,]$ si ha $\int_a^b |f+g| = \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$ da cui $\int_a^b -(f+g) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \int_a^b -f + \int_a^b -g$ e quindi $-\int_a^b f + g = -\int_a^b f - \int_a^b g$ da cui $-\int_a^b f + g = -\left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) = -\int_a^b f + g$. Vale quindi l'eguaglianza.

Il vigore delle relazioni $\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{cases}$ in $[a\,,b]$ porta con sè alla conseguenza $\begin{cases} f(x)+g(x) \geq 0 \\ f(x)+g(x) < 0 \end{cases}$ in $[a\,,b]$.

Fuori da queste ipotesi restrittive è possibile esista almeno un $\tau \in [a,b]$ per il quale sia vero che $(f(x)+g(x)) \geq 0$ per $x \in [a,\tau]$ e sia $(f(x)+g(x)) < 0$ quando $x \in \,]\tau,b]$.

Per linearità si può scrivere che

$$\int_a^\tau |f+g| + \int_\tau^b |f+g| \leq \int_a^\tau |f| + \int_\tau^b |f| + \int_a^\tau |g| + \int_\tau^b |g|$$

Se $f(x)+g(x) < 0$ allora è possibile una delle relazioni $\begin{cases} f(x) < 0, g(x) < 0 \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \\ |g(x)| > |f(x)| \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \\ |g(x)| < |f(x)| \end{cases} \end{cases}$

Queste considerazioni paiono – ancorchè corrette – stupide nel senso che la dimostrazione della terza proprietà (la cosiddetta diseguaglianza triangolare) per la funzione de quo può essere effettuata all'uopo ricordando che la relazione $f(x)+g(x) > 0$ può essere verificata non solo nel caso banale già trattato per

il quale sia $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ al contempo ma anche quando sia vero che

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$ o simmetricamente $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) > -f(x) \end{cases}$.

Con riferimento al primo dei due casi ammesso sia $\int_a^b |f+g| = \int_a^b f+g$ essendo $|f+g| = f+g > 0$.

Per la linearità dell'integrale si può scrivere

$\int_a^b |f+g| = \int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g < \int_a^b f$ in quanto $g(x) < 0$: $g(x) > -f(x)$.

Sono di tutta evidenza i seguenti passaggi formali

$$\int_a^b |f+g| = \int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$$

Al riguardo poiché si è posto $f(x) \geq 0$ si ha $\int_a^b f = \int_a^b |f|$

Si ottiene un esito conforme alla teoria in quanto $\int_a^b g < \int_a^b |g|$ coerentemente con l'aver ammesso $g(x) < 0$.

Mutatis mutandis è possibile trattare il secondo caso indicato.

Similmente può essere studiato il caso $f + g < 0$.

Nei termini più generali si può sintetizzare con i seguenti passaggi formali di immediata interpretazione.

$$f \leq |f| \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

$g \leq |g| \Rightarrow \int_a^b g \leq \int_a^b |g|$

Sommando membro a membro si ha

$f + g \leq |f| + |g|$

$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$

Per la linearità dell'integrale si ha

$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^f f + g \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$

Quindi $\int_a^b f + g \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$.

Si può altresì ammettere che $\int_a^b f + g \leq \int_a^b |f + g|$

Sono state ottenute le due seguenti relazioni

$$\begin{cases} \int_a^b f + g \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g| \\ \int_a^b f + g \leq \int_a^b |f + g| \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$\int_a^b f + g - \int_a^b f + g \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g| - \int_a^b |f + g|$

Pertanto si può scrivere che $0 \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g| - \int_a^b |f + g|$ e quindi

$\int_a^b |f + g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|$ c.v.d. .

In Analisi è definita una ulteriore norma integrale formalizzata sempre considerando le funzioni continue $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ ponendo, per definizione,

che $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$ ovvero considerando una funzione per la quale $\|\,.\,\|_2\ C \to \mathbb{R}_0^+ : f \xrightarrow{\|\ \|_2} \sqrt{\int_a^b |f|^2}$.

$\forall\ f\ C([a,b],\mathbb{K}),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ si ha si ha $\|\lambda f\|_2 = \left(\int_a^b |\lambda f|^2\right)^{1/2} =$

$\left(\int_a^b |\lambda|^2 |f|^2\right)^{1/2} = \left(|\lambda|^2 \int_a^b |f|^2\right)^{1/2} = \left(\lambda^2 \int_a^b |f|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$

In definitiva si è evidenziato che $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$

Se $f \equiv 0$ (trattasi della cosiddetta funzione nulla) si può scrivere

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} = \|0_C\|_2 = \left(\int_a^b |0|^2\right)^{1/2} = 0$$

Se $\left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} = 0$ allora $f \equiv 0$

Deve altresì valere la diseguaglianza triangolare

$$0 \leq \left(\int_a^b |f+g|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$$

Elevando al quadrato si ha

$$\left(\left(\int_a^b |f+g|^2\right)^{1/2}\right)^2 \leq \left(\left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\int_a^b |f+g|^2 \leq \int_a^b |f|^2 + \int_a^b |g|^2 + 2\left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$$

$$\int_a^b |f+g|^2 \leq \int_a^b |f|^2 + \int_a^b |g|^2 + 2\left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$$

Il primo membro può essere sviluppato ponendo

$\int_a^b |f+g|^2 = \int_a^b (f+g)^2 = \int_a^b (f^2 + g^2 + 2fg) = \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\int_a^b fg$. Si può quindi scrivere

$$\int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\int_a^b fg \leq \int_a^b |f|^2 + \int_a^b |g|^2 + 2\left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$$

E' di tutta evidenza che $\int_a^b f^2 \equiv \int_a^b |f|^2$, $\int_a^b g^2 \equiv \int_a^b |g|^2$.

Pertanto la precedente diseguaglianza equivale alla diseguaglianza $\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$, riconducibile alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz per gli integrali.

Se $fg > 0$ allora $\int_a^b fg = \left|\int_a^b fg\right|$ in quanto $fg > 0 \Rightarrow \int_a^b fg > 0$.

Se $fg < 0$ deve essere $\int_a^b fg < 0$. In questo caso la diseguaglianza è verificata in quanto un numero negativo $\left(\int_a^b fg\right)$ è minore di un numero reale non negativo $\left(\left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{1/2}\right)$.

Solitamente la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz per gli integrali è scritta come segue:

$$\left|\int_a^b fg\right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$$

In particolare, se $\int_a^b fg > 0$ le diseguaglianze

$0 \leq \int_a^b fg \leq \left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$ sono equivalenti alle seguenti:

$0^2 = 0 \leq \left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{1/2}\right)^2$ e quindi

$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$ o anche

$\left|\int_a^b fg\right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2$ (evidenza della d. di Cauchy – Schwarz nel caso $fg > 0$).

Sarà utile sviluppare il caso $fg < 0$. Tale caso è ovviamente precluso quando in $[a\,, b]$ entrambe le funzioni sono "costantemente" positive o negative.

Si può fare un esempio "elementare", utile – credo – a dare il senso di quanto si intende affermare.

Sia $\vartheta \in (a\,, b)$ tale che $\begin{cases} f(x) > 0,\ g(x) > 0\ \forall x\ \in [a, \vartheta] \\ f(x) > 0,\ g(x) < 0\ \forall x\ \in\ ]\vartheta, b] \end{cases}$

Con riferimento a detto caso si può scrivere

$\int_a^\vartheta fg \leq \left(\int_a^\vartheta |f|^2 \int_a^\vartheta |g|^2\right)^{1/2}$

$\int_\vartheta^b fg \leq \left(\int_\vartheta^b |f|^2 \int_\theta^b |g|^2\right)^{1/2}$ con $\int_\vartheta^b fg < 0$

Sommando membro a membro si ha

$\int_a^\vartheta fg + \int_\vartheta^b fg \leq \left(\int_a^\vartheta |f|^2 \int_a^\vartheta |g|^2\right)^{1/2} + \left(\int_\vartheta^b |f|^2 \int_\vartheta^b |g|^2\right)^{1/2}$

Tale relazione è vera *a fortiori* in quanto $\int_\vartheta^b fg < 0$.

Per la linearità dell'integrale si può scrivere che

$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^\vartheta |f|^2 \int_a^\vartheta |g|^2\right)^{1/2} + \left(\int_\vartheta^b |f|^2 \int_\vartheta^b |g|^2\right)^{1/2}$

Deve altresì essere vero che

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$\int_a^b fg - \int_a^b fg \leq \left(\int_a^\vartheta |f|^2 \int_a^\vartheta |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\vartheta^b |f|^2 \int_\vartheta^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$0 \leq \left(\int_a^\vartheta |f|^2 \int_a^\vartheta |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\vartheta^b |f|^2 \int_\vartheta^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$0 \leq \left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^\vartheta |f|^2 \int_a^\vartheta |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\vartheta^b |f|^2 \int_\vartheta^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Per concludere la dimostrazione è necessario evidenziare che

$$\left(\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^\vartheta |f|^2 \int_a^\vartheta |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\vartheta^b |f|^2 \int_\vartheta^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nei termini più sintetici la diseguaglianza triangolare della norma di che trattasi può essere ricondotta ad intervalli nei quali entrambe le funzioni sono positive (o negative) e ad intervalli nei quali dette funzioni hanno (eventualmente) segni discorsi.

Le norme integrali già considerate sono generalizzabili introducendo una norma integrale detta di *H*ölder formalizzata scrivendo

$\|.\|_{p\,,[a\,,b]} : C([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_0^+$ tale che $f \xrightarrow{\|.\|_p} \int_a^b (|f|^p)^{p^{-1}}$ con $p \in [1\,,+\infty[$.

Un ulteriore esempio di norma è definito a partire dall'insieme delle funzioni reali di una variabile reale continue in $[a\,,b]$ ponendo

$$\|f(x)\|_1 = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$$

Sia $f \in C([a,b],\mathbb{K})$ dove, ad esempio, si può porre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Trattandosi di funzioni la norma può essere scritta formalmente, come già detto,

$\|f(x)\|_{1,[a\,,b]} = \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$

Le prime due proprietà di cui deve godere la funzione $\|\,.\,\|: f \to \mathbb{R}_0^+$ tale che $f \xrightarrow{\|\,.\|} \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$.

Infatti, posto $\|f(x)\|_{1,[a\,,b]} = \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$ anche le funzioni $\lambda\ f_k(x)$ sono elementi di $C([a,b],\mathbb{K})$ comunque sia $\lambda \in \mathbb{K}$.

E' quindi possibile dare significato a $\|\lambda f(x)\|_{1,[a\,,b]} = \sum_{k=1}^{n}|\lambda f_k(x)|$.

Si può scrivere $\|\lambda f_k(x)\|_{1,[a\,,b]} = \sum_{k=1}^{n}|\lambda f_k(x)| = |\lambda|\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$

Si osservi che ponendo $\lambda = 0$ si ha $\|0 \cdot f_k(x))\|_{1,[a\,,b]} = \sum_{k=1}^{n}|0 \cdot\ f_k(x)| = |0|\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| = 0_{\mathbb{R}}$. In questo caso la funzione$0 \cdot f_k(x)$ deve essere intesa come la funzione nulla in $[a\,,b]$ cioè la funzione $\begin{cases} f(x) \equiv 0 \\ dom\ f = [a\,,b] \end{cases}$.

Deve ritenersi che ci si intende riferire ai valori assoluti delle funzioni f_k calcolati in $x = x_0 \in [a,b]$.

Come già fatto presente, è utile ricordare che $|f_k(x)|$ individua numeri reali non negativi. Si osserva che se $f_k(x) = 0$ allora evidentemente $\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| = 0$. Vale il contrario, nel senso che $\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| = 0$ impone sia $f_k(x) = 0$ (identicamente, cioè $k \leq n : k \in \mathbb{N}$ dato $n \in \mathbb{N}$).

Si è evidenziato che $\|\,.\,\|: f \to \mathbb{R}_0^+$ tale che $f \xrightarrow{\|\,.\|} \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$ è una seminorma.

Occorre dimostrare la terza proprietà al fine di evidenziare che si tratta di una norma.

In sintesi, deve risultare

$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)+g_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| + \sum_{k=1}^{n}|g_k(x)|$

Pacificamente il secondo membro $\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| + \sum_{k=1}^{n}|g_k(x)|$ è un numero non negativo cioè risulta $\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| + \sum_{k=1}^{n}|g_k(x)| \geq 0$. Ciò evidentemente vale per ogni $x \in [a,b]$.

La relazione $\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)+g_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| + \sum_{k=1}^{n}|g_k(x)|$ deve valere per ogni $x \in [a,b]$. Si tratta di una forma compatta che formalizza n distinte relazioni del tipo

$|f_k(x)+g_k(x)| \leq |f_k(x)| + |g_k(x)|$

Assegnato $x = x_0 \in [a,b]$ e dato $k \leq n$ è immediato constatare che nei casi

$$\begin{cases} f_k(x_0) = g_k(x_0) = 0 \\ \begin{cases} f_k(x_0) > 0 \\ g_k(x_0) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f_k(x_0) < 0 \\ g_k(x_0) < 0 \end{cases} \end{cases}$$ risulta verificata l'eguaglianza

$|f_k(x)+g_k(x)| = |f_k(x)| + |g_k(x)|$

Fuori da queste ipotesi risulta

$|f_k(x)+g_k(x)| < |f_k(x)| + |g_k(x)|$

Con riferimento alla forma compatta è evidente che la condizione

$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)+g_k(x)| = \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| + \sum_{k=1}^{n}|g_k(x)|$ impone il contestuale per un assegnato $x \in [a,b]$ il contestuale valere della condizione $|f_k(x)+g_k(x)| = |f_k(x)| + |g_k(x)|$ $\forall k \leq n$ tale che $k \in \mathbb{N}$.

Da ultimo, occorre fare cenno alla *norma della convergenza uniforme.*

Sia dato un insieme non vuoto X ($X \neq \emptyset$), sia $\mathbb{K}$ il campo degli scalari e sia B l'insieme delle funzioni limitate di dominio X nel campo $\mathbb{K}$. Se $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ l'insieme B= $B(X;\ \mathbb{R})$ denota l'insieme delle funzioni reali di una variabile reale limitate il cui dominio è X. Detto insieme ha – rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$ – struttura di spazio vettoriale.

In definitiva $\forall\,(f\,,g) \in B \times B, \forall\,(\alpha\,,\beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ si ha che $(\alpha f + \beta g) \in B$.

La norma $\|\,.\,\|_\infty : f \xrightarrow{\|\,.\|_\infty} \sup_{x\in X}|f(x)|$ è detta norma della convergenza uniforme in quanto una successione di funzioni $(f_n)_n$ converge uniformemente se e solo se esiste un $n \geq n_0$ tale che siano verificate entrambe le condizioni

$$\begin{cases} f_n - f \in B(X;\ \mathbb{K}) \\ \|f_n - f\| \to 0\ quando\ n \to +\infty \end{cases}.$$

Distanza associata ad una norma

Dato uno spazio vettoriale munito di una norma (avendo quindi uno spazio vettoriale normato), denotato utilizzando la coppia $(I\,,\|.\|)$, si indica con $d(x\,,y)$ la distanza associata alla norma $\|.\|$ e si scrive

$$d(x\,,y) = \|x - y\|\ \forall\,(x,y) \in I \times I.$$

Possono, ora, essere introdotte le proprietà della distanza che, già dalle prime battute, può essere agevolmente intesa come funzione che associa ad una coppia ordinata di elementi di I un numero reale non negativo univocamente, non

essendo, in generale, vero il contrario, esistendo infinite coppie di elementi di I posti alla medesima distanza (tra loro).

Formalmente, quindi, una distanza è una relazione formalizzabile ponendo

$$d : I \ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \ \ | \ (x,y) \overset{d}{\rightarrow} d(x,y)$$

Detta funzione gode delle seguenti proprietà:

$$d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall (x,y) \in I \times I$$

$$d(x,y) = 0 \equiv x = y \quad \forall (x,y) \in I \times I$$

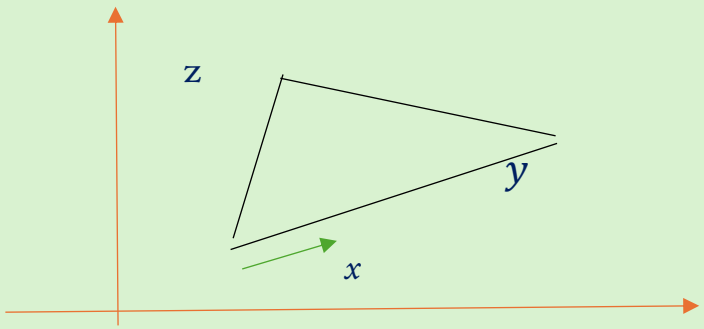
La funzione $d : I \ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \ \ | \ (x,y) \overset{d}{\rightarrow} d(x,y)$ deve altresì verificare la cosiddetta diseguaglianza triangolare per la quale $\forall (x,y,z) \in I \times I \times I$ deve risultare verificata la diseguaglianza

$$d(x\ ,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

o, equivalentemente,

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

Di tale relazione ne può essere data una rappresentazione grafica in $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$. Con riferimento ad $\mathbb{R}^2$ si può dare la seguente rappresentazione grafica.



Evidentemente la relazione $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$ diviene $\|x-y\| = \|x-z\| + \|z-y\|$ quando i punti x , z, y sono allineati

Valgono altresì due ulteriori proprietà.

In particolare, si può dimostrare che

$\forall (x,y) \in I \times I, \forall \lambda,\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$

Può essere fatto un esempio banale in $\mathbb{R}$. Se $d(x,y) = \|x-y\|$ si ha che

$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x-y)\| = |\lambda| \|(x-y)\| = |\lambda| d(x,y).$

Si ricordi che $d(x,y) = |x-y| = \|(x-y)\|.$

Operando in $\mathbb{R}^n$ la distanza euclidea tra i punti $x\ ed\ y$ è

$d(x,y) = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

I punti $x\ ed\ y$, elementi di $\mathbb{R}^n$, sono definiti, come è noto, da $n-ple$ ordinate di elementi di $\mathbb{R}$.

Si ha, ad esempio,

$x = (x_1, x_2, \ldots., x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots., y_n)$

Assegnato un $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ si può porre

$d(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i - \lambda y_i)^2} = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 (x_i - y_i)^2} = \sqrt[2]{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = |\lambda| \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

E' altresì utile considerare una ulteriore proprietà della distanza detta *invarianza per traslazione.*

Deve essere dimostrato che

$$\forall (x, y, z) \in I \times I \times I \; d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

In $\mathbb{R}^n$ i punti $(x + z)\; e\; (y + z)$ possono essere scritti come segue

$$x + z = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n) + \; (z_1, z_2, \dots\dots, z_n) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, \dots\dots, x_n + z_n)$$

$$y + z = (y_1, y_2, \dots\dots, y_n) + \; (z_1, z_2, \dots\dots, z_n) = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots\dots, y_n + z_n)$$

La formula della distanza euclidea tra i punti $(x + z)\; e\; (y + z)$ cioè $d(x + z, y + z)$ è

$$d(x + z, y + z) = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} \left((x_i + z_i) - (y_i + z_i)\right)^2} = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i - y_i - z_i)^2} = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = d(x\,, y)$$ c.v.d..

Fatte queste sommarie considerazioni è utile ricordare che può essere necessario stabilire se una funzione è (o non) una distanza in uno spazio metrico.

Così, ad esempio, in $\mathbb{R}$ la funzione $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ è una distanza.

Come ulteriore esempio, riportato dal Giusti, di distanza in $\mathbb{R}$ può essere ricordata la funzione

$$d(x, y) = |e^x - e^y|$$

Essa và intesa nel senso che alla coppia $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è univocamente associato il numero reale non negativo $|e^x - e^y|$.

Si ha $|.| : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ tale che $(x, y) \overset{|.|}{\to} |e^x - e^y|$

Affinchè la funzione assegnata sia una distanza è necessario e sufficiente che siano verificate le tre proprietà delle distanze.

Se $(x\,,y) = (0\,,0)$ si ha $d(0\,,0) = \ |e^0 - e^0| = |1-1| = |0| = 0$

Viceversa $|e^x - e^y| = 0$ impone sia $e^x - e^y = 0$ e quindi $e^x = e^y$.

La funzione esponenziale $x \xrightarrow{exp} e^x$ è strettamente crescente. In generale $e^x \neq e^y$. La condizione di eguaglianza $e^x = e^y$ impone sia $x = y = 0$. Pertanto si può affermare che $|e^x - e^y| = 0 \Rightarrow \ x = y = 0$.

Data la coppia ordinata $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si ha che $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, ivi compreso $\alpha = 0$, si può scrivere che $d(\alpha x\,, \alpha y) = |e^{\alpha x} - e^{\alpha y}| = |e^{\alpha} e^x - e^{\alpha} e^y| = |e^{\alpha}(e^x - e^y)| = |e^{\alpha}||e^x - e^y| = |e^{\alpha}| d(x\,, y)$.

Occorre, al fine di evidenziare che la funzione assegnata sia una distanza, dimostrare che vale la diseguaglianza triangolare. Per essa deve risultare che

$\forall (x, y,\ z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ risulta verificata la seguente relazione

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ che con riferimento al caso concreto viene formalizzata come segue $|e^x - e^y| \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y|$.

In disparte casi particolari la relazione deve essere verificata in generale $\forall (x, y,\ z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \ | x \neq y \neq z$.

Il primo membro $|e^x - e^y|$ può essere riscritto ponendo $|e^x - e^y| = |(e^x - e^z) + (e^z - e^y)|$.

Si può pertanto riscrivere la relazione ponendo

$|(e^x - e^z) + (e^z - e^y)| \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y|$

Si è già avuto modo di ricordare la rilevanza della relazione $d(x,y) = \|x - y\|$. J.M.Monier nel suo testo di Analisi rimarca una immediata conseguenza di detta eguaglianza all'uopo utilizzando la formula

$d(x,0) = \|x - 0\| = \|x\|$ dove $0 \equiv 0_V$

Delle proprietà della metrica già si è detto.

Assegnato uno spazio E ed una distanza d (funzione nel senso già enunciato) la coppia $(E\ , d)$ è detta *spazio metrico*.

Esistono due relazioni fondamentali – sotto forma di diseguaglianze triangolari – che relazionano uno spazio vettoriale normato ad una distanza d associata ad una norma istituita in detto spazio vettoriale normato.

Lo spazio vettoriale normato è la coppia $(E\ , \|.\|)$.

La prima relazione è

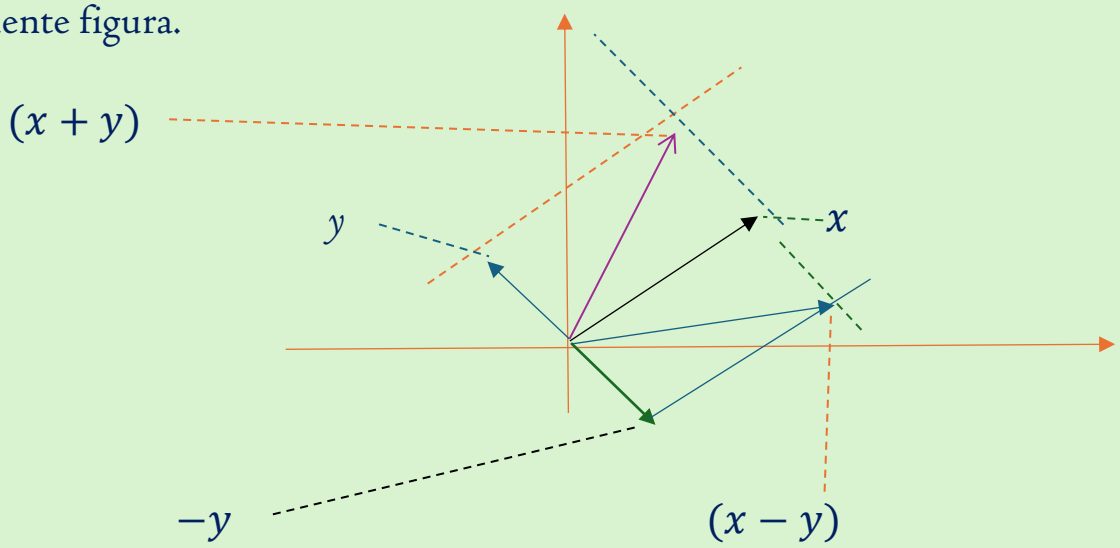
$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$$

Si hanno le due seguenti possibili relazioni

$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ quando $\|x\| > \|y\|$

$\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|$ quando $\|x\| < \|y\|$

Un esempio in $\mathbb{R}^2$ pare utile a comprendere i termini della questione. Occorre sempre rifarsi alla regola del parallelogramma di Newton. Siano x ed y i punti dati. I punti $(x + y)$ e $(x - y)$ sono ottenibili graficamente come si evince dalla seguente figura.



E' utile ricapitolare con altre osservazioni quanto già affermato in relazione alle norme.

Come è noto, uno spazio normato è definito dalla coppia $(X, \|.\|_X)$. Siano x e y due elementi dello spazio X. La distanza tra due elementi qualunque dello spazio X mette in relazione ogni coppia ordinata $(x, y) \in X \times X$ dello spazio X ad un elemento $d = d(x, y) \in \mathbb{R}_0^+$ secondo lo schema

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad | (x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\|$$

Da $d(x,y) = \|x - y\|$ come caso particolare, ponendo $y = 0_X$ si ha

$d(x, 0_X) = \|x - 0_X\| = \|x\| \; \forall x \in X - \{0_X\}$

Ponendo $x = 0_V$ in $d(x, 0_X) = \|x - 0_X\| = \|x\|$ si ottiene $d(x, 0_X) = \|x - 0_X\| = \|x\|$ si ha $d(0_X, 0_X) = \|0_X - 0_X\| = \|0_X\| = 0_{\mathbb{R}}$

Si osservi che nel caso particolare $y = x$ risulta vero che

$d(x,y) = \|x - y\| \overset{y=x}{\Longrightarrow} d(x,x) = \|x - x\| = \|0_X\| = 0_{\mathbb{R}}$

Se si ritenesse di utilizzare il linguaggio tipico della geometria si dovrebbe scrivere che $ker\, d = \{(x,x) \in X \times X\}$. Si tratta dell'insieme delle coppie ordinate aventi eguali le due componenti dell'insieme X.

Non si tratta di una applicazione iniettiva in quanto esistono infinite coppie ordinate di elementi di X (quelle aventi la prima e la seconda componente eguali tra di loro) cui è univocamente associato l'elemento $0_{\mathbb{R}}$.

La funzione distanza è intesa come distanza "associata" ad una determinata norma (detta associata). La distanza è per così dire dipendente dalla norma che viene utilizzata in concreto.

Affinchè una applicazione lineare sia definibile come una distanza occorre verificare, con riferimento al caso concreto, se sono verificate le tre seguenti proprietà formali

$d(x,y) = d(y,x) \; \forall \; (x,y) \in X \times X \leftarrow$ proprietà di simmetria

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \; \forall \; (x,y) \in X \times X \leftarrow$ proprietà di separazione

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z\,,y) \leftarrow \forall \; (x,z,y) \in X \times X \times X \leftarrow$ diseguaglianza triangolare.

A dare compiuto senso alla relazione di coordinamento, nel senso della unicità della norma $\|.\|_X$, alla relazione $d(x,y) = \|y - x\|$ o alla equivalente $d(y\,,x) = \|x - y\|$ sono necessarie ulteriori due proprietà di già studiate con riferimento al caso particolare dello spazio $\mathbb{R}^n$.

Deve risultare che

$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \;\; \forall (x,y) \in X \times \; X, \forall \lambda \in \mathbb{K} \leftarrow$ omogeneità positiva.

Tali proprietà, nelle pagine precedenti, sono state dimostrate con riferimento alla distanza $d(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ associata alla norma euclidea $\|y - x\| = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$.

Detta norma euclidea è, in $\mathbb{R}^n$, l'unica (unicità) per la quale sia $d(y\,,x) = \|x - y\|$.

Le due citate proprietà (omogeneità positiva e invarianza per traslazione) possono essere dimostrate formalmente in modo alquanto semplice.

Infatti si può scrivere che $d(\lambda x, \lambda y) = \|\,\lambda y - \lambda x\| = \|\,\lambda(y - x)\| = |\lambda|\|\,(y - x)\| = |\lambda| d(x,y) \leftarrow$ positiva omogeneità.

L'invarianza per traslazione viene dimostrata ponendo

$d(x + z, y + z) = \|(y + z) - (x + z)\| = \|y + z - x - z\| = \|y - x\| = d(x,y)$

In definitiva $d(x + z, y + z) = d(x\,,y)\; \forall (x,y,z) \in X \times X \times X$.

Sono di interesse le *norme indotte su un sottospazio vettoriale*.

Dato uno spazio vettoriale normato cui è associata una funzione distanza d. Si può scrivere $\left((X, \| \, . \, \|_X) \, , d\right)$ con ciò intendendo che d è la distanza indotta. Sia $X' \subseteq X \neq \emptyset$ un sottospazio vettoriale di X.

X' è – come è noto – un sottospazio vettoriale di X se

$X' \subseteq X \neq \emptyset$

$\forall (x', y') \in X' \times X'$ risulta che $\forall (\alpha \, , \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ si ha

$(\alpha x' + \beta y') \in X'$

In particolare posto $\alpha = \beta = 0_{\mathbb{K}}$ si può affermare che $(0_{\mathbb{K}} x' + 0_{\mathbb{K}} y') \in X'$ In definitiva esiste un vettore nullo elemento di X' che può essere indicato con $0_{X'}$. E' di tutta evidenza che $X' \subseteq X$ impone $0_{X'} \equiv 0_X$.

Dato X' nel senso appena enunciato può essere considerata la funzione che associa ad un qualunque elemento $x' \in X'$ (e ovviamente anche $x' \in X$) univocamente un numero reale non negativo, quindi un elemento di $\mathbb{R}_0^+$.

Data la norma $\| \, . \, \|_X$ è naturale poter sostenere che la medesima norma ha senso per ogni sottoinsieme proprio non vuoto di X. E' come introdurre una restrizione.

Sempre con riferimento a $X' \subseteq X \neq \emptyset$ è possibile introdurre una distanza d' tra elementi di X' ponendo

$d' : X' \times X' \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \;\; | \; (x \, , y) \overset{d'}{\rightarrow} d'(x, y).$

Risulta $d' \equiv d$. La ragione è di tutta evidenza. I punti $x' \; e \; y'$ sono elementi di X' ma anche elementi di X (essendo X' $\subseteq X$).

Vanno citate le *norme su un prodotto finito di un* $\mathbb{K}$ *−spazi vettoriali.*

Sia dato un certo numero di spazi vettoriali E_i con $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$ ad ognuno dei quali sia associata una norma N_i. Si hanno n coppie (E_i, N_i) . Si ponga $E = \prod_{k=1}^{n} E_k = E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_n$. Sia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un qualunque elemento di E.

Vengono definite le seguenti norme

$\mu_1(x) = \sum_{k=1}^{n} N_k(x_k)$

$\mu_2(x) = (\sum_{k=1}^{n} (N_k(x_k))^2)^{1/2}$

$\mu_\infty(x) = Max\ N_k(x_k)$

Esse sono dette norme standard su $E = \prod_{k=1}^{n} E_k = E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_n$ associate alle norme N_i.

Algebre normate

Dato un $\mathbb{K} -$ spazio vettoriale munito di una legge di composizione interna $\cdot$ distributiva rispetto alla legge di composizione $+$.

E' utile ricordare che una legge di composizione interna è una relazione tra elementi di uno stesso insieme che associa univocamente ad ogni copia di elementi dello spazio vettoriale assegnato un elemento dello stesso spazio vettoriale.

La legge di composizione $+$ è tale che alla coppia $(a\ , b) \in X\ \times X$, essendo X lo spazio vettoriale assegnato corrisponde l'elemento $c = a + b$, pure elemento di X ottenuto univocamente quando siano noti gli elementi $a\ e\ b$.

Se la legge di corrispondenza moltiplicativa $\cdot$ è distributiva se sono verificate le relazioni $\begin{cases} x(y+z) = xy + xz \\ (x+y)z = xz + yz \end{cases} \quad \forall (x,y,z) \in X \times X \times X$ e se $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y) \begin{cases} \forall (x,y) \in X \times X \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$ detto spazio vettoriale è detto $\mathbb{K}-$ algebra .

Per ampliamenti successivi si ha una $\mathbb{K}-$ algebra commutativa se $x \cdot y = y \cdot x$ (sovente scritta $xy = yx$) $\forall (x,y) \in X \times X$.

Una $\mathbb{K}-$ algebra non necessariamente commutativa (o abeliana) è detta associativa se risulta $x(yz) = (xy)z = xyz \ \forall (x,y,z) \in X \times X \times X$.

Una $\mathbb{K}-$ algebra è detta unitaria se $\exists! \ e \in X$ tale che $ex = xe = x \ \forall x \in X$.

Occorre introdurre ora due ulteriori definizioni, quella di norma d'algebra e quella di algebra normata.

Sia Ω una $\mathbb{K}-$algebra cioè una struttura algebrica definita da uno spazio vettoriale con legge di composizione interna moltiplicativa distributiva rispetto all'addizione e per la quale risulti $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

Sia data la coppia (Ω, N) essendo N un norma associata allo spazio vettoriale definibile nel senso più sopra ricordato come una $\mathbb{K}-$algebra.

Viene definita la compatibilità della norma N con la moltiplicazione di Ω se e solo se esiste un numero reale positivo c per il quale comunque si prenda una coppia di elementi di Ω sia vero che $N(xy) \leq cN(x)N(y)$.

N è una *norma d'algebra* se e solo se $N(xy) \leq N(x)N(y)$ comunque si considerino due elementi *x ed y di* Ω.

La coppia $(\Omega\ ,N\ )$ è una $\mathbb{K}-$ *algebra normata* se N è una norma d'algebra su Ω.

Intorni e norme

Sia assegnato uno spazio vettoriale normato $(\mathrm{X}\ ,\|\ .\ \|)$ e una distanza d associata alla norma data. Sia $x_0$un elemento di X e sia r un numero reale positivo. Possono essere definiti gli intorni aperti e gli intorni chiusi di centro x_0 e di raggio $r > 0$.

$$B(x_0\ ,r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\ \}$$

Detto intorno simmetrico è un aperto. Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ posto $x_0 = (0,0)$ il luogo $B(x_0\ ,r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\ \}$ è geometricamente coincidente con il cerchio di centro $x_0 = (0,0)$ e di raggio r privato della frontiera (circonferenza). Ciò non è vero in generale ma quando sia data la norma $\|\ .\ \|_2$

Infatti, detta norma è – quando si consideri il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ – quella per la quale $\|x\| = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} < |\boldsymbol{r}|$.

Nel caso si consideri la norma $\|\ .\ \|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ si ha infatti una distinta rappresentazione grafica e i punti del luogo sono quelli per i quali risulta verificata la condizione $\|\ x\|_1 < 1$. Deve cioè essere verificata la condizione $x_1 + x_2 < 1$ sviluppabile graficamente per punti. Ad esempio se si pone $x_1 = 0$ risulta che $x_2 < 1$ che di fatto conduce a due soluzioni simmetriche $x_2 = \pm 1$. In generale nel caso $x_1 \neq x_2 \neq 0$ la frontiera (non appartenente al luogo in quanto trattasi

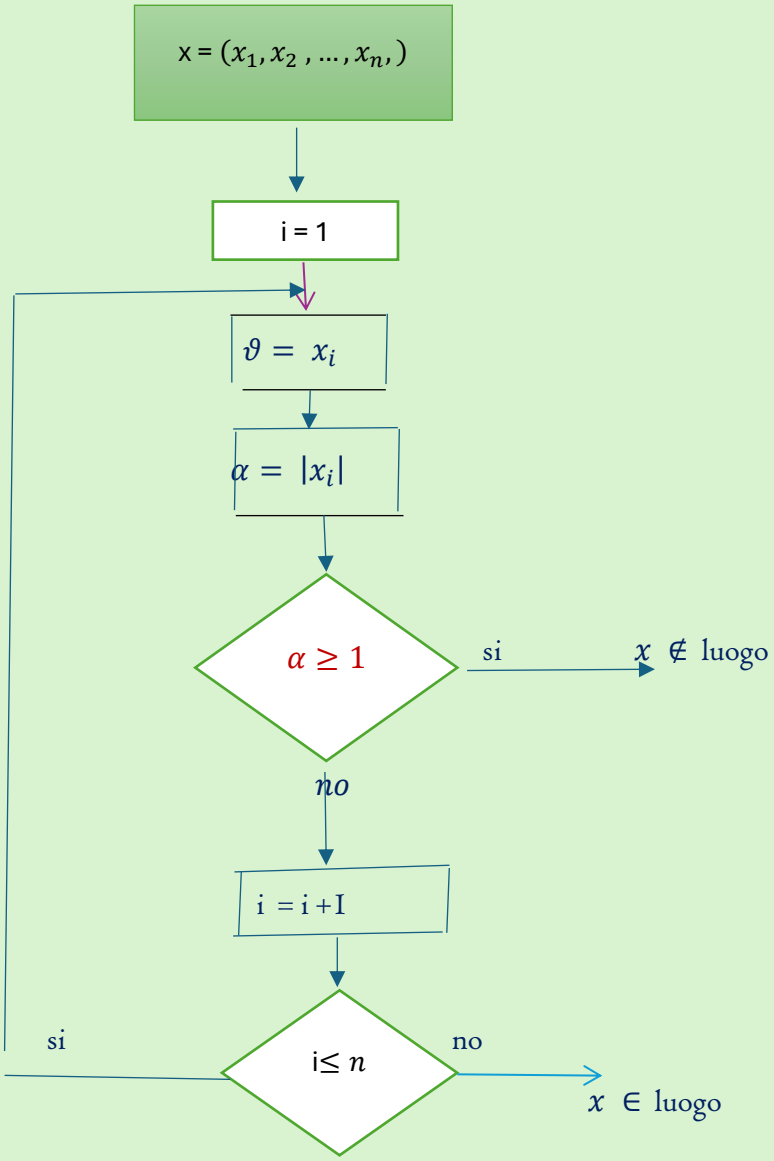
di un aperto) variando, sia x_1 che x_2, in $]-1\,,1[$ e data da quattro segmenti di retta, che si intersecano a due a due, a formare una losanga il cui lato misura $\sqrt[2]{2}$.

Volendo, su questo punto, si potrebbe essere più analitici ma la relativa rappresentazione è di immediata comprensione.

Altrettanto intuitiva è sempre con riferimento al piano cartesiano la rappresentazione del luogo quando si utilizza la norma $\| \, . \, \|_\infty = Max|x_k|$ che adattata al caso di specie diviene $\| \, x \, \|_\infty < Max|x_k| = 1$. I punti sull'asse delle ascisse sono tali che $x_1 = 0$ e pertanto ogni $-1 < x_2 < 1$ è del luogo. Riflessione simile può essere svolta per $x_2 = 0$ e pertanto ogni $-1 < x_1 < 1$ appartiene al luogo. (0 ,0) è di tutta evidenza elemento del luogo. Ogni punto interno al quadrato di lato $l = 2$ centrato in (0 ,0) è elemento del luogo. Infatti ogni punto interno a detto quadrato, denotato genericamente con $\vartheta \equiv (x_{1,\vartheta}\,, x_{2,\vartheta})$ è tale che $Max\,(x_{1,\vartheta}\,, x_{2,\vartheta}) < 1$.

In generale, il punto $\boldsymbol{x}$ appartiene – con riferimento al caso concreto trattato – al luogo se risulta identicamente vero che $|x_k| < 1 \Leftrightarrow -1 < x_k < 1$. Già questa osservazione dà conto della simmetria del luogo rispetto all'asse delle ordinate – quando si considera il caso del piano cartesiano. Ma oltre questo caso specifico il punto $\boldsymbol{x}$ appartiene al luogo se risulta identicamente vero che $|x_k| < 1 \Leftrightarrow -1 < x_k < 1$ quando tale relazione è vera al variare di k intero assoluto tale che $0 < k \leq n$, essendo n la dimensione dello spazio che si considera.

In altri termini considerando $\| \, x \, \|_\infty < Max|x_k| = 1$ con riferimento allo spazio $\mathbb{R}^n$ si può dare una "spiegazione" sotto forma di diagramma di flusso nei termini sottoindicati.



Similmente un intorno chiuso è formalizzato ponendo

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

Con riferimento al solito caso $r = 1$ quando in luogo di un aperto si considera un chiuso le considerazioni fatte vanno opportunamente mutate avendo riguardo che in detto caso la frontiera è parte dell'insieme e quindi del luogo.

Le nozioni di “aperto” e di “chiuso” saranno sviluppate successivamente.

Parti limitate di uno spazio vettoriale normato

Sia data la terna $(X, \| . \|, d)$ cioè uno spazio vettoriale con norma assegnata (spazio vettoriale normato) cui, ulteriormente, è associata una distanza d.

Un insieme X’ $\subset X$ è detto limitato se comunque si prendano due elementi di X’ esiste un $r \in \mathbb{R}_+$ tale che la distanza tra di essi sia non maggiore di r.

In termini formali si può scrivere

$$\forall\, (x, y) \in X' \times X' \;\; \exists\, r \in \mathbb{R}_+ : \;\; d(x, y) \leq r$$

Quella indicata è la definizione formale di parte limitata di uno spazio vettoriale normato.

In realtà, esiste una ulteriore modalità per definire un aperto o un chiuso limitato all’uopo utilizzando la nozione di norma.

X’ $\subset X$ è limitato se comunque si prenda un elemento $x \in X'$ esiste un $c \in \mathbb{R}_+$ tale che $\|x\| \leq c$.

Formalmente si può scrivere che

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_+ : \;\; \|x\| \leq c \;\; \forall\, x \in X'$$

$X' \subset X$ è limitato se e solo se esiste un intorno (aperto o chiuso) contenente X’.

Si può quindi introdurre la nozione di *funzione (applicazione) limitata*.

Sia dato l'insieme non vuoto X' e si consideri una applicazione $f : X' \to X$. Detta funzione è limitata se e solo se $f(X')$ è una parte limitata di X.

L'insieme $f(X')$ è limitato se e solo se esiste un $r \in \mathbb{R}_+$ per il quale risulti vera la relazione $d(f(x'), f(y')) \leq r \; \forall (x', y') \in X' \times X'$.

Si può anche affermare che $f : X' \to X$ è una funzione limitata se e solo se $\|f(x')\| \leq c \; \forall \; x' \in X'$ per un dato $c \in \mathbb{R}_+$.

Sia $X' \subset X$ e X' limitato e non vuoto. Si può definire diam X' ponendo

$$diam\, X' = \sup d(x, y)$$

Se X' non è limitato (e neppure è vuoto) si pone

$$diam\, X' = +\infty$$

Aperti e chiusi

Dato $(X\,, \|\,.\,\|, d)$ e sia $X' \subset X$ è – rispetto ad X – un aperto se $\forall\; x \in X'$ esiste un numero reale $r = r(x) > 0$ tale che esiste un intorno simmetrico $B(x\,, r) \subset X'$.

A meno di avere a che fare con un X' simmetrico oltre ad imporre la ovvia condizione $r = r(x)$ deve essere altresì risultare $r = min\; sup\; d(x, \varphi)$ essendo $\varphi \notin X'$ tale che $\varphi \in \partial X'$ (frontiera di X').

Sotto questa condizione $B(x\,, r) \subset X'$. Tale condizione non è verificata per $r > min\; sup\; d(x, \varphi)$.

I punti x che verificano la condizione $r \leq min\, sup\, d(x, \varphi)$ possono essere definiti punti interni dell'aperto X' .

Assegnato un aperto X' e considerati i punti della frontiera, cioè l'insieme $\partial X'$ definiscono un chiuso, associato a X'.

Si può scrivere che $X'_{ch} = X' \cup \partial X$ quando X' è un aperto.

Sia dato $\mathbb{R}$ e sia $\ni X' \subset \mathbb{R} : X' \equiv [a\,, b[$ con $a < b$. Si ottiene l'insieme (a, b) che, detto in termini banali ma evidenti, contiene tutti gli elementi dell'insieme di partenza ad eccezione degli elementi della frontiera appartenenti all'insieme.

Incidentalmente un punto è detto di frontiera di X se esiste un intorno simmetrico di esso tale che esso (intorno simmetrico) contenga infiniti punti appartenenti ad X e infiniti punti non appartenenti ad X.

Un punto di frontiera può appartenere a X oppure può non appartenere a X. Gli aperti si caratterizzano per il fatto che i punti di frontiera non appartengono ad X mentre, al contrario, i chiusi si caratterizzano per il fatto che i punti della frontiera sono elementi di X.

Sia dato $X \subset E$

in lavorazione

La diseguaglianza di Cauchy-Schwarz con riferimento ad una dimostrazione contenuta nella Geometria di Tom Mike Apostol

Ha suscitato interesse l'approccio dimostrativo della nota diseguaglianza contenuto in un famoso ed autorevole manuale di Geometria redatto dal matematico americano Tom Mike Apostol.

Si può scrivere la relazione in argomento ponendo

$$(ab)^2 \leq (aa)(bb)$$

essendo $a\ e\ b$ due qualunque elementi di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ dove (.) denota un prodotto scalare risultando $(aa) > 0\ , (bb) > 0,$ quindi elementi di $\mathbb{R}^+$ (numeri reali non negativi, considerata l'ipotesi più generale $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}\ e\ \ b \neq 0_{\mathbb{R}^n}$).

Un esempio banale – riferito allo spazio $\mathbb{R}^2$ – chiarisce la relazione tra il prodotto scalare $(aa) > 0$ e la norma $\|a\|$.

Se si pone $a = (a_1, a_2) \neq (0\ , 0)$ il prodotto scalare può essere scritto ponendo $(aa) = a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^2 + a_2^2$ che immediatamente è il quadrato della distanza del punto $(a\ , a) \neq (0\ , 0)$ dal punto $(0\ , 0)$.

In termini sintetici $(aa) = (\|a\|)^2$

Nei termini più generali – con riferimento allo spazio $\mathbb{R}^n - \ \forall x\ \in \mathbb{R}^n$ risulta essere

$$(xx) = (\|x\|)^2$$

Con riferimento al prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$ risulta essere vero che

$$(ab) = \|a\|\|b\|cos\vartheta$$

Elevando al quadrato ambo i membri della diseguaglianza risulta essere

$(\|a\|\|b\|cos\vartheta\ )^2 \leq (\|a\|\|b\|)^2$

Poiché $(\|a\|\|b\|)^2 \neq 0$ (quando $a \neq 0_{\mathbb{R}^n}\ e\ \ b \neq 0_{\mathbb{R}^n}$) risulta banalmente vero che $(cos\vartheta\ )^2 \leq 1$ coerentemente con la circostanza che deve risultare $-1 \leq cos\vartheta \leq 1$.

L'Apostol ricorda nel suo plastico elaborato che se almeno uno dei due vettori (o, al limite, entrambi) sono nulli si ottiene un caso di eguaglianza risultando banalmente $0 \leq 0$ quindi, di fatto, $0 = 0$ (ovviamente).

Un caso particolare di eguaglianza si ha quando sia $cos\vartheta = \pm 1$. In questo caso i vettori $a\ e\ b$, ancorchè non nulli, sono linearmente dipendenti, quindi del tipo $a = \lambda b$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nell'elaborare una dimostrazione che non fa riferimento alle componenti scalari del vettori la diseguaglianza in argomento introduce un vettore C combinazione lineare dei vettori A e B che viene denotato come C= $xA -$

yB essendo $x\ ed\ y$ rispettivamente il prodotto scalare BB e AB.

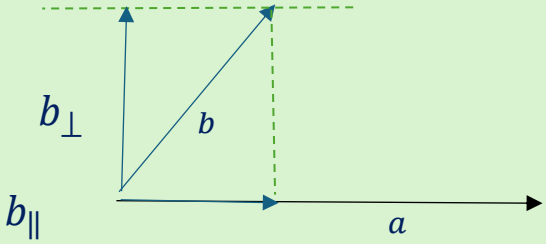
Per i dettagli si rinvia al testo di Apostol citato, che ho trovato strumento davvero utile di ripasso.

Paradossalmente chiari i successivi passaggi formali dimostrativi, non mi è risultato possibile, al momento, comprendere la ragione dell'aver posto C come la citata combinazione lineare.

Mi sono posto il problema di ipotizzare un endomorfismo – mai rinvenuto nella lettera basica a mia disposizione – per il quale $\forall\ (a\ , b) \in V^n \times V^n$ esiste una f :

$V^n \times V^n \rightarrow V^n$ in ragione della quale $(a\,,b) \overset{f}{\rightarrow} xa + yb$ essendo $x = bb$ e $y = ab$.

Una semplice rappresentazione grafica riferita al prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^2$ pare, almeno parzialmente, istruttiva.



In estrema sintesi il vettore b può essere scomposto in due componenti, una parallela all'altro vettore e la seconda ortogonale al vettore a. In ogni caso poiché $b = b_\perp + b_\parallel$.

Sono pertanto leciti i seguenti passaggi formali

$$ab = a(b_\perp + b_\parallel) = ab_\perp + ab_\parallel = 0 + ab_\parallel = ab_\parallel$$

Risulta $ab_\parallel = \|a\|\|b\|cos\vartheta$

in lavorazione

Convergenza di successioni in uno spazio vettoriale E

Sia dato $(E\ ,\|.\|\ ,d)$ e sia altresì assegnata una successione $(u_n)_n$ cioè una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $n \overset{u}{\to} u(n) \equiv (u_n)_n$.

Una successione è detta convergente al limite finito l se esiste un $l \in E$ per il quale – dato $n_0 \in \mathbb{N}$ – risulta vero che la distanza $d(u_n, l) \leq \varepsilon\ \forall\ n \geq n_0$ comunque si prenda ε, dovendo comunque essere $\varepsilon > 0$.

Deve infatti, per la definizione di distanza tra elementi di E, verificato il seguente sistema di diseguaglianze

$0 <\ d(u_n, l) \leq \varepsilon$

con la condizione $d(u_n, l) > 0$

(Lo scrivere $d(u_n, l) = 0$ presuppone sia vero che $l\ \in E$ ed anche che – poiché i termini di una successione sono infiniti – esista un n' oltre il quale sia identicamente vero che $d(u_n, l) = 0$ ovvero sia verificata la condizione $u(n) = l\ \forall n\ \geq n'$).

In termini strettamente formali la condizione di convergenza di una successione (appunto convergente in E) risulta essere formalizzabile come segue

$\exists\ l\ \in E\ :\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ |\forall n \geq n_0\ (n \in \mathbb{N})$ risulta vera la condizione

$d(u_n, l) \leq \varepsilon$

Se detta relazione è verificata per le condizioni date si può affermare che l è il limite (finito e unico) della successione $(u_n)_n$.

Per n arbitrariamente grande i punti x_n si avvicinano indefinitamente al punto l.

Il nesso rilevante è

$$\begin{pmatrix} d(u_n, l) \to 0^+ \\ d(u_{n+1}, l) < d(u_n, l) \end{pmatrix} \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = l \leftarrow$$ formalizzazione della convergenza.

Quello appena elaborato sembra il caso della generazione di una successione di distanze $d(u_n, l)$ – al variare crescente di $n -$ tale che $d_{n+1} < d_n$.

Se la successione è infinitesima essa può essere convergente ma tale argomentazione non può essere generalizzata nel senso che può essere introdotta – assegnato un punto finito $l = 0 -$ una successione costante per la quale identicamente risulta $u(n) = \delta \to 0^+$ (con δ assegnato) che non converge a $l = 0$ in quanto trattasi di una successione costante.

Per contro una successione non infinitesima può essere convergente.

Ad esempio, operando nel contesto delle successioni reali può ipotizzare il caso di una successione monotona strettamente decrescente che converga al valore l arbitrariamente diverso da 0.

Come è noto, il limite di una successione, se esiste è unico. Per dimostrare tale unicità si ragiona per assurdo e si ammette siano dati due punti limite distinti $l_1 \neq l_2$ cui fare convergere la data successione.

Vi è un innegabile nesso consequenziale tra detta diseguaglianza di Cauchy-Swartz e la cosiddetta diseguaglianza triangolare, utile anche ad evidenziare *la unicità del limite di una successione* $(u_n)_n$ (quando detto limite esista finito, posto eguale al numero reale l).

Se si ammette, per ipotesi, che una successione limitata abbia due distinti limiti finiti (elementi di E, $(se\ del\ caso\ di\ \mathbb{R})$) risultando essi $l_1 \neq l_2$ senza ambiguità si può scrivere $d(l_1, l_2) > 0$.

Applicando la diseguaglianza triangolare si può scrivere

$$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, u_n) + d(u_n, l_2)\ \forall\ n \geq n_0 : (n, n_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Poiché $d(l_1, u_n) = d(u_n, l_1)$ la data diseguaglianza può essere riscritta come segue

$$d(l_1, l_2) \leq d(u_n, l_1) + d(u_n, l_2)$$

E' immediatamente ammissibile $\forall\ n \geq n_0$ scrivere

$$\begin{cases} d(u_n, l_1) \leq \varepsilon \\ d(u_n, l_1) \leq \varepsilon \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha

$$d(u_n, l_1) + d(u_n, l_2) \leq 2\varepsilon$$

Riordinando si ha

$$d(l_1, l_2) \leq d(u_n, l_1) + d(u_n, l_2) \leq 2\varepsilon$$

Per $\varepsilon \to 0^+$ risulta

$$d(l_1, l_2) \leq d(u_n, l_1) + d(u_n, l_2) \leq 0$$

In ultima analisi risulta $d(l_1, l_2) \leq 0$.

Il caso $d(l_1, l_2) = 0$ non è accettabile in quanto $l_1 \neq l_2$ (*recte*: l'aver imposto $l_1 \neq l_2$ conduce all'esito non accettabile $d(l_1, l_2) = 0$).

Ad evidenza assurda conduce l'altra possibilità, quella di ammettere come gli esiti algebrici evidenziano che sia $d(l_1, l_2) < 0$. Tale risultato non è accettabile in quanto deve essere $d(l_1, l_2) > 0$ quando $l_1 \neq l_2$.

E' evidente che l'aver ammesso la possibilità di due distinti limiti al finito conduce *ex se* ad una contraddizione insanabile.

Evidentemente se si pone $l_1 = l_2$ si ottiene $0 \leq 0 \leq 0$ che non conduce a contraddizione.

Tale risultato è coerente con la unicità del limite di una successione convergente ad un limite finito.

Giova ricordare che una successione convergente è limitata, non essendo vero il contrario. Una successione limitata non necessariamente è convergente, si pensi alla successione $u_n = (-1)^n$ che, come noto è oscillante.

Applicazioni lipschitziane

Siano dati $(E\ , \| \ . \|_E\ , d_E)$ e $(F\ , \| \ . \|_F\ , d_F)$

Sia f una applicazione $X \to F$ e sia $k \in (0\ , +\infty)$. Detta funzione è detta $k-$ lipschitziana se $\forall (x, y) \in X \times X$ è verificata la relazione

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$$

Il caso $k = 0$ è ammesso e si pone

$d_F(f(x), f(y)) \leq 0 \cdot d_X(x, y) \Rightarrow d_F(f(x)\ , f(y)) \leq 0$ e in definitiva risulta essere – per la definizione di distanza – verificata la condizione

$0 \leq d_F(f(x)\,, f(y)) \leq 0 \Rightarrow d_F\big(f(x)\,, f(y)\big) = 0.$

Comunque si prendano in X due punti risulta sempre vero che $d_F\big(f(x) - f(y)\big) = 0$. E' il caso della funzione costante $f(x) \equiv cost.\ \forall x\ \in X.$

Operativamente l'applicazione f è detta di Lipschitz se $k \in (0\,, +\infty)$ tale che sia verificata la condizione $d_F(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$

L'insieme i cui elementi sono le funzioni $k-$ lipschitziane è indicato con il formalismo $Lip_k(X\,, F)$ mentre l'insieme delle funzioni di Lipschitz è l'unione insiemistica $Lip(X, F) = \bigcup_{k\in\mathbb{R}_+} Lip_k(X\,, F)$.

$Lip_k(X\,, F)$ non è in generale uno spazio vettoriale. Siano infatti date due funzioni $f_1\ e\ f_2$ elementi di $Lip_k(X\,, F)$. Occorre verificare che non necessariamente la funzione $\alpha f_1 + \beta f_2$ con $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è elemento di $Lip_k(X\,, F)$.

E' utile evidenziare che $\begin{pmatrix} f \in Lip_k(X\,, F) \\ g \in Lip_{k'}(X\,, F) \end{pmatrix} \Rightarrow f + g\ \in Lip_{k+k'}(X\,, F)$

Per ipotesi risulta

$0 < d_F(f(x)\,, f(y)) \leq k d_X(x, y)$

$0 < d_F(g(x)\,, g(y)) \leq k' d_X(x, y)$

Sommando membro a membro si ha

$0 < d_F\big(f(x), f(y)\big) + d_F\big(g(x)\,, g(y)\big) \leq k d_X(x, y) + k' d_X(x, y)$

Da essa si può ottenere che

$d_F\big(f(x), f(y)\big) + d_F\big(g(x), g(y)\big) \leq (k + k')(d_X(x, y))$

Il primo membro può essere riscritto ponendo

$$d_F\big(f(x)\,,f(y)\big)+d_F\big(g(x),g(y)\big)=d_F\big((f+g)(x)-(f+g)(y)\big)$$

In definitiva si può porre

$$d_F\big((f+g)(x),(f+g)(y)\big)\leq(k+k')(d_X(x,y))$$

Pertanto la funzione $(f+g)\in Lip_{k+k'}(X\,,F)$ quando è data l'ipotesi sia

$$\begin{pmatrix} f\in Lip_k(X\,,F)\\ g\in Lip_{k'}(X\,,F)\end{pmatrix}.$$

Se si pone $k=k'$ si ha $(f+g)\in Lip_{2k}(X\,,F)$ quando $\begin{pmatrix} f\in Lip_k(X\,,F)\\ g\in Lip_k(X\,,F)\end{pmatrix}$.

Questa osservazione consente banalmente di evidenziare che l'insieme $Lip_k(X\,,F)$ non può avere struttura di spazio vettoriale in quanto se una funzione, quale è $(f+g)$, è elemento di $Lip_{2k}(X\,,F)$ non necessariamente è elemento di $Lip_{2k}(X\,,F)$. La condizione di appartenenza a $Lip_k(X\,,F)$ di una funzione appartenente a $Lip_{2k}(X\,,F)$ è stringente nel senso che per le condizioni poste $k<2k, quando\ k>0$.

Se $Lip_k(X\,,F)$ avesse struttura di spazio vettoriale dovrebbe essere vero che comunque si prendano due funzioni tali che $\begin{pmatrix} f\in Lip_k(X\,,F)\\ g\in Lip_k(X\,,F)\end{pmatrix}$ dovrebbe risultare $(\alpha f+\beta g)$, è elemento di $Lip_k(X\,,F)$ per ogni coppia di reali $(\alpha\,,\beta)$ Ciò non risulta possibile. Basta porre $\alpha=\beta=1$ come nel caso discusso per confutare l'ipotesi della struttura di spazio vettoriale per l'insieme in oggetto.

Sovvengono altresì ulteriori considerazioni quali le seguenti.

Si ammetta sia $f \in Lip_k(X, F)$ e sia $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1$. Sotto queste condizioni risulta che $\lambda f \in Lip_{|\lambda|k}(X, F)$. Operando con la funzione distanza si ha

$0 < d_F(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$ (ipotesi)

Quando si considera la funzione λf risulta che

$0 < d_F\big(\lambda f(x), \lambda f(y)\big) = |\lambda| d_F(f(x), f(y))$

D'altronde da $0 < d_F(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$ moltiplicando i termini del sistema di diseguaglianze si ottiene un sistema di eguaglianze equivalente a quello dato in quanto $|\lambda| > 0_{\mathbb{R}}$.

Pertanto

$(0 < d_F(f(x)\, f(y)) \leq k d_X(x, y)) \Rightarrow (0 < |\lambda| d_F(f(x) - f(y)) \leq |\lambda| k d_X(x, y))$

Una ulteriore proprietà riguarda la tipizzazione della funzione composta $g \circ f(x) \equiv g(f(x))$ che segue lo schema $x \overset{f}{\to} f(x) \overset{g}{\to} g\big(f(x)\big)$.

Si ammette per ipotesi che siano date le funzioni

$$\begin{pmatrix} f \in Lip_k(X, F) \\ g \in Lip_{k'}(Y, G) \end{pmatrix}$$

Deve risultare che $f(X) \subseteq Y$

Ciò posto, vale la seguente implicazione

$$\begin{pmatrix} f \in Lip_k(X, F) \\ g \in Lip_{k'}(Y, G) \\ f(X) \subseteq Y \end{pmatrix} \Rightarrow g \circ f \in Lip_{kk'}(X, G)$$

Per le ipotesi date risulta vero che

$0 < d_F(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$

$0 < d_G(g(f(x)), g(f(y))) \leq k' d_Y(f(x), f(y))$

Ma $k' d_Y(f(x), f(y)) \equiv k' d_F(f(x), f(y)) \; \forall (f(x), f(y)) \in f(X) \subseteq Y$

Poiché $k' > 0$ da $0 < d_F(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$ si ottiene un sistema equivalente ponendo $0 < k' d_F(f(x), f(y)) \leq k' k d_X(x, y)$

Vale il seguente sistema di diseguaglianze

$0 < d_G\left(g(f(x)), g(f(y))\right) \leq k' \, d_Y(f(x), f(y)) = k' d_F(f(x), f(y)) \leq k' k d_X(x, y)$

Pertanto $0 < d_G\left(g(f(x)), g(f(y))\right) \leq k' k d_X(x, y)$

(L'eguaglianza $k' \, d_Y(f(x), f(y)) = k' d_F(f(x), f(y))$ è riferita alle coppie $(f(x), f(y)) \in f(X) \subseteq Y$)

Nei termini più generali l'insieme $Lip\,(X, F)$ delle funzioni di Lipschitz è uno spazio vettoriale.

Si dimostra che la funzione norma è una funzione I – lipschitziana.

Come è noto, la norma associa univocamente ad un elemento $x \in E$ un numero reale non negativo. Schematicamente si scrive

$\| . \| : E \to \mathbb{R}^+ \quad | \; x \overset{\| . \|}{\longrightarrow} \|x\|$

Affermare che la funzione norma è una funzione I – lipschitziana equivale ad affermare che

$d(\|x\| , \|y\|) \leq k\ d(x,y)$ con $k = 1$, quindi a porre vera la condizione

$d(\|x\| , \|y\|) \leq\ d(x,y)$

E' nota la relazione fondamentale di coordinamento per la quale risulta che

$d(x,y) = \|x - y\|$

Poiché $\|x\|\ \ e\ \|y\|$ sono di fatto due numeri reali è possibile utilizzare la nozione di valore assoluto – strumento per designare la distanza tra elementi di $\mathbb{R}$.

Pertanto si può utilmente scrivere che $d(\|x\| , \|y\|) \equiv |\|x\| - \|y\||$.

Occorre dimostrare che $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Può, al riguardo, essere utile ammettere vera per ipotesi la relazione data verificando che per successivi passaggi algebrici si ottiene una relazione palesemente vera.

Si hanno i seguenti passaggi algebrici immediati, a partire da quantità non negative, salvo una ipotesi degenere. Se $x = y = 0_E$ si ha – con semplice sostituzione in formula – che $0 = 0$. Se $x = \alpha y\ con\ \alpha \in \mathbb{K}$ per sostituzione in formula si ottiene $|\|\alpha y\| - \|y\|| \leq \|\alpha y - y\| \Rightarrow |\alpha||\|y\| - \|y\|| \leq |\alpha|\|y - y\| \Rightarrow |\alpha||\|0_E\|| \leq |\alpha|0\ \Rightarrow 0 \leq 0$ e in definitiva $0 = 0$.

Nel caso $\begin{pmatrix} x = \alpha y\ \ \forall (x,y) \in E \times E \\ \forall \alpha : \alpha \in \mathbb{K} \end{pmatrix} \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| = \|x - y\|$

Resta pertanto da considerare il caso che gli elementi $(x,y) \in E \times E$ non siano del tipo $x = \alpha y\ con\ \alpha \in \mathbb{K}$.

Nel linguaggio dell'algebra vettoriale tali elementi sono detti essere vettori linearmente dipendenti.

Fuori da queste ipotesi particolari vale la seguente diseguaglianza stretta

$|\|x\| - \|y\|| < \|x - y\|$ potendo affermare che

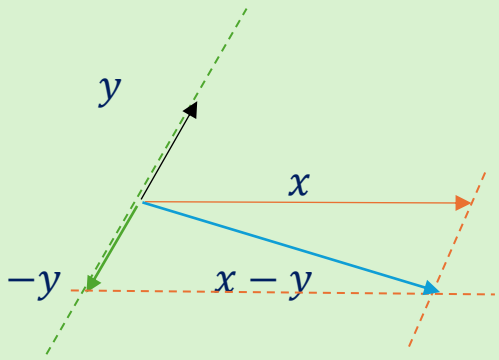
$(\forall (x, y) \in E \times E \ : x \neq \alpha y \ , \forall \alpha \in \mathbb{K}) \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| < \|x - y\|$

In questo caso – a giustificare la diseguaglianza – sovvengono considerazioni elementari che paiono esaustive. Occorre rilevare che la funzione norma non è una applicazione iniettiva. Un esempio banale chiarisce il significato di questa affermazione.

Sia assegnato un sistema di riferimento Oxy. Esistono infiniti vettori OP di assegnata norma. Si tratta di tutti quelli di origine O e di estremo finale P, essendo i punti P quelli di una circonferenza di centro O e di raggio assegnato.

In particolare i vettori opposti $x \, e - x$ hanno la stessa norma. Si può scrivere $\|x\| = \|-x\|$ in quanto $\|-x\| = |-1|\|x\| = 1 \cdot \|x\| = \|x\|$.

Sovviene la seguente rappresentazione grafica.



Per la diseguaglianza triangolare risulta

$\|x - y\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$ per quanto più sopra affermato.

Occorre dimostrare la seguente relazione

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x\| + \|y\|$$

Si tratta di una relazione sostanzialmente immediata di fatto conseguente alla nozione di norma.

Si può porre $\begin{cases} \|x\| = a \ \in \mathbb{R}^+ \\ \|x\| = b \ \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ e scrivere che

$$|a - b| \leq a + b$$

Si deve pertanto discutere

$$\begin{cases} |a - b| \leq a + b \\ a > b \end{cases} \text{ e } \begin{cases} |a - b| \leq a + b \\ a < b \end{cases}$$

Nel primo caso si ha $a - b \leq a + b \ \Rightarrow -b < b$ vera in quanto $b > 0$.

Nel secondo caso si ha $b - a \leq a + b \Rightarrow -a < a$ vera con la condizione $a > 0$.

Si è dimostrato che $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x\| + \|y\|$ ma si è altresì evidenziato che $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dal combinato delle relazioni trovate risulta vero che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

In ultima analisi risulta

$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ c.v.d. .

Sia data una applicazione $f : X \to X$. Sovente vengono studiate le applicazioni $Lip_k(X , X)$ quando si ponga $k \in [0 \ , 1[$

Spazi vettoriali normati di dimensione finita. Successioni di Cauchy.

Se E è un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale di dimensione finita tutte le norme su E sono equivalenti.

in lavorazione

Compatti. Compattezza.

Sia assegnato lo spazio vettoriale E e una norma $\| \, . \, \|$ su di esso. E' quindi data la coppia $(E \, , \| \, . \, \|)$. Sia A $\subset E$. Per definizione A è detto essere un compatto se è limitato e chiuso.

Esempi elementari di compatti sono i seguenti. In $\mathbb{R}$ l'intervallo $[a \, , b]$ con a$\leq b$ è un compatto in quanto è un chiuso e limitato, sia inferiormente che superiormente.

L'intersezione di compatti è un compatto. L'insieme $[-2 \ , 5] \cup [9 \, , 24[$ non è un compatto in quanto intersezione di un chiuso e di un aperto a destra.

Ulteriore esempio di compatto, questa volta in $\mathbb{R}^2$, è il rettangolo $[a, b] \times [a, b]$. Ovviamente non è un compatto il rettangolo $]a \, , b[\times]c \, , d[$ cui "manca" la frontiera. Il continuo reale $]-\infty \, , +\infty[$ illimitato non è un compatto.

Siano assegnati due spazi vettoriali di dimensione finita detti E ed F. Siano date le applicazioni $f : X \to F$.

Si dimostra che se X è un compatto e f è una funzione continua allora $f(X)$ è un compatto. Non vale il contrario nel senso che se $f(X)$ è un compatto non necessariamente $f^{-1}(f(X)) = f^{-1}f(X) = X$ è un compatto.

Possono essere portati esempi riferiti alle funzioni reali di una variabile reale, quali i seguenti:

$f : [a\,, b] \to \mathbb{R} \;\; | \; f(x) = 3x + 2.$ In questo caso particolare, trattandosi tra l'altro di una applicazione iniettiva, peraltro pur trattandosi di una condizione non essenziale, si evince *icto oculi che* $f(X) = [3a + 2\,, 3b + 2]$ che è limitato e chiuso.

Infatti $\inf f(X) = (3a + 2) \in f(X) = min\, f(X)$.

Risulta altresì vero che $\sup f(X) = (3b + 2) \in f(X) = \max f(X)$.

Evidentemente in questo caso particolare vale anche la condizione contraria. Ciò è di tutta evidenza.

Ma detta condizione inversa non è sempre rispettata.

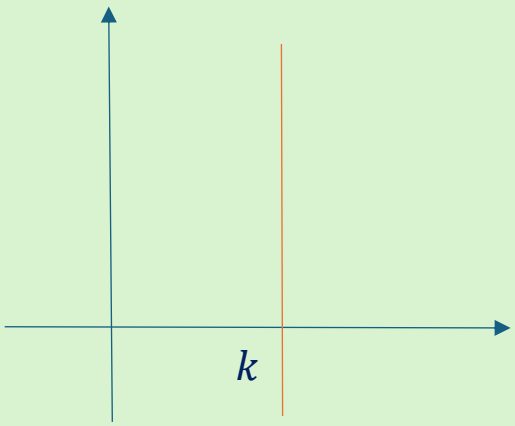
E' ad esempio il caso – con riferimento alle funzioni reali di una variabile reale – della funzione costante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; | \; x \overset{f}{\to} f(x) = k : k \in \mathbb{R}$.

In questo caso risulta essere $f(X = \mathbb{R}) = \{k\}$. L'insieme $\{k\}$ è un compatto.

L'applicazione inversa della data – quella che associa al valore $k \in \mathbb{R}$ non un elemento di X=$\mathbb{R}$ pare essere alquanto *sui generis* e non una vera funzione nel senso

ordinario del termine. Infatti, una funzione reale di una variabile reale è ben definita se $\forall x \in dom\, f \; \exists !\; f(x)$.

Quella rappresentata nel grafico seguente non è come il grafico di una funzione reale di variabile reale.



C'è comunque da concordare che $\mathbb{R}$, illimitato sia superiormente che inferiormente, non è un compatto.

Non si è in presenza di compatti neppure nel caso delle successioni reali cioè delle applicazioni $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in quanto $\mathbb{N}$ non è un compatto al pari di $\mathbb{R}$. Introducendo una restrizione, per esempio ammettendo che il dominio di u, $dom\, u = \{n : n \in \mathbb{N},\; n \leq n_0 \in \mathbb{N}\} \equiv \{0\} \cup \{1\} \cup \ldots \cup \{n_0\}$ che è un compatto in quanto unione di compatti, può definirsi una funzione inversa – u(n) sia iniettiva – cui è associato il compatto $\{(u^{-1}u)(0)\} \cup \{(u^{-1}u)(1)\} \cup \ldots \cup \{(u^{-1}u)(n_0)\} \equiv dom\, u$.

In ogni caso la manualistica di riferimento (Monier) evidenzia che si considerano funzioni f munite della proprietà di continuità.

Può essere utile sviluppare la nozione di funzione(i) inversa(e) andando oltre quanto solitamente viene descritto dall'Analisi I. La monotonia (stretta) di una funzione consente di ottenere, come è noto, la funzione inversa di quella data. Se f è una funzione strettamente monotona si può affermare che esiste ed è unica una funzione f^{-1} *per la quale risulta verificata l'identità funzionale* $f^{-1}(f(x)) = (f^{-1}f)(x) = x \; \forall x : x \in dom\, f$. *Le due funzioni – data f ovviamente* f^{-1} *è unica – sono simmetriche – qualora rappresentate nel piano cartesiano – rispetto alla retta* $y = x$.

Uno dei punti più rilevanti della teoria elementare delle funzioni è che in generale la composizione di due funzioni non è commutativa, nel senso che, in generale, risulta che

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Detto altrimenti, in generale, risulta che $f(g(x) \neq g(f(x)$ *non essendo rilevante che possa esistere un* $x = x_0$ *per il quale sia* $f(g(x_0) \neq g(f(x_0)$.

Nei termini più generali una funzione (applicazione) è una legge di corrispondenza tra insiemi – al limite tra elementi di un medesimo insieme (endomorfismo).

Sia data una legge di corrispondenza f tra gli insiemi A e B . Formalmente si scrive

$$f: A \to B \quad (A = dom\, f)$$

Una funzione β *è detta inversa a sinistra di f se applicando* β *ad ogni elemento di f(A) risulta che* $\beta\big(f(A)\big) = x \; \forall x \; \in A$.

Sono immediati i seguenti passaggi formali

$$\beta\big(f(A)\big) = (\beta f)(x) = Id_A$$

La funzione Id_A *è l'endomorfismo che associa ad un elemento di A (recte ad ogni elemento di A lo stesso elemento di A) . In termini formali* Id_A *è tale che*

$$Id_A : A \to A \quad | x \overset{Id_A}{\longrightarrow} Id_A(x) \equiv x \quad \forall\, x \in A$$

Ritornando alla nozione di inversa a sinistra si può scrivere che

$$\forall\, x \in A = dom\, f \overset{f}{\to} f(x) \in f(A) \overset{\beta}{\to} \beta\big(f(x)\big) = Id_A(x) \equiv x \quad \forall\, x \in A$$

Si consideri ora la funzione φ *che associa ad un elemento di* $f(A)$ *un elemento di A. Sia* $y = f(x)$ *un elemento di f(A), sia cioè vero che* $y = f(x) \in f(A)$.

Gli sviluppi devono condurre a considerare $f \circ \varphi = f\big(\varphi(y)\big) = f\Big(\varphi\big(f(x)\big)\Big)$.

Deve essere altresì vero che $f\big(\varphi(y)\big) = (f\varphi)(y) = y$.

Se è verificata questa condizione si può affermare che la funzione φ *è una funzione inversa destra della funzione data* f. *Una funzione* φ *che verifica la condizione* $(f\varphi)(y) = y$ *è tale che* $f\varphi : f(A) \to f(A)$ *nel senso che* $f\varphi \equiv id_{f(A)}$.

L'inversa a sinistra se esiste è unica e l'esistenza della funzione inversa è limitata al caso delle applicazioni iniettive. Una applicazione f è iniettiva se

$$\forall\, (x, y) \in A \times A : x \neq y \;\Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

L'inversa a sinistra è anche un'inversa a destra. Sia data la funzione f *supposta iniettiva e sia* g *la funzione inversa a sinistra. Ciò posto, per la definizione di funzione inversa risulta che* $g\big(f(x)\big) = g \circ f\ (x) = (g \circ f)(x) = id_A(x) = x\ \forall x \in A$.

Occorre ora studiare $f \circ g\ (y) = f \circ \big((g \circ f)(x)\big) = f \circ id_A(x) = f(x) = y$.

La relazione $\big((g \circ f)(x)\big) = id_A(x)$ *discende dall'ipotesi sia* $g = f^{-1}$ *conseguente all'ipotesi di iniettività.*

in lavorazione

Continuità delle applicazioni lineari. Equivalenza delle norme in uno spazio vettoriale di dimensione finita.

E' utile introdurre la nozione di $\mathbb{K}$ −linearità.

Sia E uno spazio vettoriale sia f una applicazione da elementi di E in elementi di F.

L'applicazione $f : E \to F$ è detta $\mathbb{K}$ −lineare a condizione che

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Tale relazione deve valere $\forall (x, y) \in E \times E$ e $\forall (\alpha\,, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$

Sovente tale relazione viene posta in forma semplificata ottenibile dividendo funzionalmente per $\beta \neq 0_{\mathbb{K}}$. Ciò posto si ha

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta}{\beta}y\right) = \frac{\alpha}{\beta}f(x) + \frac{\beta}{\beta}f(y)$$

In essa si pone $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$ ed ovviamente $\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = 1$ e si può scrivere la forma equivalente $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Nel caso più generale si ammette che gli insiemi $E \; ed \; F$ non siano lo stesso insieme, lo stesso spazio vettoriale.

L'insieme i cui elementi sono le applicazioni lineari dallo spazio E ad F è indicato correntemente con il formalismo $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.

Sovente risulta $E \equiv F$. In questo caso l'applicazione lineare f associa ad un elemento di E un elemento parimenti di E.

L'insieme di dette leggi di corrispondenza – ordinariamente definite endomorfismi – è dentato con $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Utilizzando la funzione composta si può introdurre una $\mathbb{K}$ −algebra.

Al riguardo si possono considerare le funzioni f e g tali che

$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ e $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$ con ciò ammettendo che $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$. Si ammette altresì che le applicazioni endomorfe $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ costituiscono una $\mathbb{K}-a$lgebra.

Siano assegnati due spazi vettoriali di dimensione finita muniti di norma, formalizzati ponendo $(E, \|.\|_E)$ e $(F, \|.\|_F)$ e sia dato l'insieme $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ delle applicazioni lineari $f : E \to F$.

Sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots . e_n)$ una delle possibili basi di E. Ciò posto, ogni elemento di E è una combinazione lineare dei vettori della base. Data una base, come è noto, ogni elemento di E può essere scritto in unico modo come una combinazione dei vettori costituenti la base, non necessariamente ortonormale.

In notazione di Einstein il generico vettore $x \in E$ può essere formalizzato ponendo $x = x_i e_i$.

Si consideri la norma $\|x\|_{\infty,E} = Max|x_i|$. Poiché lo spazio vettoriale E è di dimensione finita tra detta norma e quella standard $\|x\|_E$ sussiste una relazione del tipo $\|x\|_{\infty,E} \leq r\|x\|_E$ tale che $r > 0$ comunque si prenda $x \in E$.

La relazione di equivalenza tra norme gode delle ordinarie proprietà di riflessività, di simmetria e della proprietà transitiva. La relazione tra norme equivalenti è indicata con il simbolo $\sim$. Se due norme N e N' sono equivalenti si scrive $N \sim N'$.

Può essere sviluppato un esempio triviale nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ il cui elemento generico è $(x_1, x_2, \ldots., x_n)$.

In esso è data la norma $\|x\|_\infty = Max|x_k|$. Può essere introdotta una ulteriore norma, tra l'altro, già definita, quale $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

Si ponga $\|x\|_\infty = Max|x_k| = |x_k| \ \ con\ 1 \leq k \leq n$

E' evidente che $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| = |x_k|$ quando $|x_i| = 0\ \forall\ i :$ $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ i \neq k : \ 1 \leq i \leq n \end{cases}$

In generale fuori da questo caso particolare risulta vera la diseguaglianza stretta $Max|x_k| < \sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

Ricomprendendo i casi possibili si può scrivere $Max|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

E' immediato considerando $n \in \mathbb{N}$ (dimensione finita dello spazio $\mathbb{K}$) scrivere $Max|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq n\ Max|x_i|$.

Si può osservare immediatamente che la condizione $\sum_{i=1}^{n}|x_i| = n\ Max|x_k|$ si ha quando $|x_i| = k \geq 0\ \ \forall\ \ i : \ 1 \leq i\ \leq n$. Per contro, se esiste almeno un i per il quale $|x_i| <\ Max|x_i|$ vale la diseguaglianza stretta.

Può essere sviluppato un esempio triviale in $\mathbb{R}^3$.

Sia $x = (2, 3, -16)$. Risulta $Max|x_i| = |-16| = 16$ ed anche $\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 2 + 3 + 16 = 21$. Poiché $n = 3$ risulta $n\ Max|x_k| = 3 \cdot 16$. In questo caso si è provato che $Max|x_i| < \sum_{i=1}^{n}|x_i| < n\ Max|x_i|$.

In generale deve risultare $Max|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq n\ Max|x_i|$.

Sovviene utile la nozione di *elemento di E aderente ad A*. E' possibile partire da un esempio banale considerando quindi un intervallo aperto a destra e a sinistra come $]a, b[$ (con a $\leq b$). Risulta evidentemente che $]a, b[\subset \mathbb{R}$. I punti di $]a, b[$ aderenti a $\mathbb{R}$ sono tutti i punti di $]a, b[$ e i punti della frontiera di detto aperto. Pertanto l'insieme dei punti di aderenza è l'intervallo chiuso $[a, b]$ e si scrive $\overline{]a, b[} =]a, b[\cup \{a\} \cup \{b\}$.

L'elemento $x \in \mathbb{R}$ non appartiene alla aderenza (insieme i cui elementi sono i punti di aderenza) se $x \notin (]a, b[\cup \{a\} \cup \{b\})$.

Nel caso di specie è di tutta evidenza scrivere che $\overline{]a, b[} = [a, b]$. In questo caso l'insieme dei punti non aderenti è $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.

La definizione formale è la seguente. Sia $(E, \| . \|)$ sia uno spazio vettoriale normato e $A \subset E$.

Un elemento di E è aderente ad A se risulta verificato che

$B(x, r) \cap A \neq \emptyset\ \forall\ r \in \mathbb{R}^+$

Se sono assegnati gli spazi vettoriali di dimensione finita $(E\ ,\|\ .\|_E)$ e $(F\ ,\|\ .\|_F)$ ed è assegnata una base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ si considerano le funzioni $f : X \to F$ ed un punto a di E aderente a X .

Sia $f_i : X \to \mathbb{K}$ intesa come la $i - esima$ coordinata di $\mathcal{B}$.

In altri termini, al punto $x \in X$ tramite la funzione $f : X \to F$ è associato univocamente il punto $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$.

La funzione f è una funzione a valori vettoriali, mentre le f_i sono funzioni a valori scalari (numerici).

La continuità delle funzioni scalari f_i implica la continuità della funzione vettoriale f.

E' sicuramente utile una digressione operativa sulla linearità ricordando che f è lineare se $\forall (x, y) \in X \times X$ risulta che $f(x \pm y) = f(x) \pm f(y)$.

Ciò consente di scrivere che $\|f(x \pm y)\| = \|f(x) \pm f(y)\|$.

Posto $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ si ha $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$.

In definitiva $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \overset{f}{\to} \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

Utilizzando le norme si ha $\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|_E \xrightarrow{f\ |\|\ .\|_E} \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F$

parte da approfondire e rielaborare

Spazi prehilbertiani

Solitamente la definizione della nozione di prodotto scalare viene data distinguendo il caso di un $\mathbb{R}$ −spazio vettoriale dall'ipotesi che si operi in un $\mathbb{C}$ −spazio vettoriale. E' comunque possibile formulare una definizione generale a partire da un $\mathbb{K}$ − spazio vettoriale, ove $\mathbb{K}$ denota indifferentemente uno dei due possibili campi numerici utilizzati, l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali o l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Ciò premesso, è possibile considerare un $\mathbb{K}$ −spazio vettoriale e definire l'applicazione prodotto lineare denotabile, ad esempio, con la lettera greca φ, ponendo

$\varphi : E \times E \ \rightarrow \mathbb{R}$

Ciò significa che $\forall (x\,, y) \in E \times E \ : \ \exists!\ \varphi(x, y) \in \mathbb{R}$

In definitiva, si può scrivere $(x\,, y) \overset{\varphi}{\rightarrow} \varphi(x, y)$ univocamente.

Se $\alpha \ \in \mathbb{K}$ la scrittura $\bar{\alpha}$ denota il coniugato di α. Se $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ si pone $\alpha = \bar{\alpha}$ al variare di α in $\mathbb{R}$. Se $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ il coniugato di $z = (a\,, b) \in \mathbb{C}$ è il numero complesso $\bar{z} = (a\,, -b) \in \mathbb{C}$. E' più utilizzata la forma algebrica per la quale si può scrivere che $\begin{cases} z = a + ib \\ \bar{z} = a - ib \end{cases}$.

Il prodotto scalare $\varphi : E \times E \ \rightarrow \mathbb{K}$ gode delle seguenti proprietà:

$\varphi\ (x, y) = \overline{\varphi\ (y, x)}\ \forall\ (x, y) \in E \times E$

Nel caso sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la proprietà enunciata è detta proprietà simmetrica e si pone

$\big(\varphi\ (x, y) = \varphi\ (y, x)\big)_{\,|\,(E, \mathbb{K}=\mathbb{R})} \ \forall\ (x, y) \in E \times E$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la relazione $\varphi\ (x, y) = \overline{\varphi\ (y, x)}\ \forall\ (x, y) \in E \times E$ è detta simmetria hermitiana e si può scrivere

$$\left(\varphi\ (x, y) = \overline{\varphi\ (y, x)}\right)_{|(E,\mathbb{K}=\mathbb{R})}\ \ \forall\ (x, y) \in E \times E$$

La seconda proprietà del prodotto scalare è la cosiddetta linearità rispetto alla seconda componente.

Per essa risulta vero che

$$\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, z)\ \ \forall (x, y, z) \in E \times E \times E\ , \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$$

Sia che si operi in un $\mathbb{R}$ −spazio vettoriale che si consideri un $\mathbb{C}$−spazio vettoriale deve risultare:

$$\varphi(x, x) \in \mathbb{R}_0^+\ \ \forall\ x \in\ E.$$

In particolare risulta $\begin{cases} \varphi(x, x) > 0\ \ \forall x\ \in E - \{0_E\} \\ \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E \end{cases}$

La linearità del prodotto scalare vige anche con riferimento alla prima componente della coppia di elementi di E cui è applicato il prodotto scalare quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si afferma che il prodotto scalare è semilineare rispetto alla prima componente.

Anche in questo caso sembra più utile partire dalla formulazione generale e scrivere la relazione tra $\varphi(x, \lambda y + z)$ e $\varphi(\lambda y + z\ , x)$ ponendo

$$\varphi(\lambda y + z\ , x) = \overline{\varphi(x, \lambda y + z)}$$

Come è noto, risulta assunto come proprietà di cui gode la funzione prodotto scalare che

$$\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, z) \;\; \forall (x, y, z) \in E \times E \times E \,, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$$

da cui immediatamente risulta

$$\varphi(\lambda y + z \,, x) = \overline{\varphi(x, \lambda y + z)} = \overline{\lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, z)} = \overline{\lambda\varphi(x, y)} + \overline{\varphi(x, z)} = \bar{\lambda}\, \varphi(x, y) + \varphi(z, x)$$

In definitiva si può scrivere

$$\varphi(\lambda y + z \,, x)_{\,|\varphi(x, \lambda y + z)} = \bar{\lambda}\, \varphi(x, y) + \varphi(z, x) \qquad \forall (x, y, z) \in E \times E \times E \,, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$$

Tale relazione è immediatamente vera quanto $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si ha

$$\varphi(\lambda y + z \,, x)_{\,|\varphi(x, \lambda y + z)} = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(z, x) \qquad \forall (x, y, z) \in E \times E \times E \,, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il prodotto scalare è variamente denotato risultando

$\varphi(x, y) = x \cdot y = \langle x, y \rangle = (x \,|\, y)$ scritture tutte tra loro equivalenti.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ onde evitare equivoci è utile ricordare le due relazioni equivalenti tra loro

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$$

$$\overline{\varphi(x, y)} = \varphi(x, y)$$

Il *prodotto scalare* come definito è detto forma *sesquilineare.*

E' utile precisare che una funzione $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ *è un prodotto scalare se gode delle proprietà più sopra enunciate.*

Sia assegnato un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale munito di un prodotto scalare, cioè di una funzione $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ che gode delle proprietà di cui gode uno spazio vettoriale.

La particolare applicazione che associa all'elemento generico $x \in E$ il prodotto scalare (x, x) è detta forma quadratica o forma hermitiana associata allo spazio vettoriale considerato a seconda che si tratti di un $\mathbb{R}-$ spazio vettoriale piuttosto che di un $\mathbb{C}-$ spazio vettoriale.

Sarà sicuramente di maggiore interesse la forma hermitiana che può essere formalizzata nei termini seguenti:

$\phi : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tale che $x \overset{\phi}{\rightarrow} \varphi(x, x)$

In definitiva tramite ϕ sono individuate le coppie $(x\,, \varphi(x, x)) \in E \times \mathbb{R}_0^+$ che associano al generico elemento $x \in E$ il prodotto scalare $\varphi(x, x)$.

Occorre evidenziare che dato un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale ad esso è associabile più di un prodotto scalare nel senso che esistono più funzioni $\phi_i : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ che godono delle proprietà che caratterizzano la nozione di spazio vettoriale.

Ad esempio in V_2 se $x \equiv (x_1, x_2)\ e\ y \equiv (y_1, y_2)$ sono due elementi di detto spazio la funzione $\varphi(x\,, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ è un prodotto scalare associabile all' $\mathbb{R}-$ spazio vettoriale V_2 isomorfo di $\mathbb{R}^2$.

Infatti, detta funzione gode delle proprietà che caratterizzano il prodotto scalare. Essa è imediatamente simmetrica (o commutativa) in quanto il prodotto dei termini (addendi) è commutativo (proprietà commutativa del prodotto di numeri reali).

Se $x = y$ per banale sostituzione si ottiene $\varphi(x\,, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \overset{x=y}{\longrightarrow} \varphi(x\,, x) = 2x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2x_2 = 2x_1^2 + 2(x_1x_2) + x_2^2$

Occorre dimostrare che assegnata la coppia $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ risulta verificata la relazione $2x_1^2 + 2(x_1x_2) + x_2^2 \geq 0$

Se $x_1 = x_2 = 0$ si ha $2x_1^2 + 2(x_1x_2) + x_2^2 = 0$ banalmente.

Altrettanto banalmente vero risulta $2x_1^2 + 2(x_1x_2) + x_2^2 > 0$ quando $\begin{cases}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-\end{cases}$

Se $\begin{cases}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+\end{cases}$ risulta $2(x_1x_2) \in \mathbb{R}^-$.

La relazione $2x_1^2 + 2(x_1x_2) + x_2^2 > 0$ è banalmente verificata $\forall x : x = (x_1\,, x_2)$ con $x_1 = x_2$.

Con riferimento alle ultime condizioni poste deve risultare $2x_1^2 + x_2^2 > -2(x_1x_2) > 0$

Da $(x_1 + x_2)$ elevando al quadrato si ha $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 0$ pertanto *a fortiori* risulta che $2x_1^2 + 2(x_1x_2) + x_2^2 > 0$ in quanto banalmente $2x_1^2 + 2(x_1x_2) + x_2^2 > x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ in quanto $2 > 0$.

Risulta quindi verificata l'ulteriore condizione $\varphi(x,x) \geq 0$ nel senso ampiamente declinato.

Occorre ora verificare la validità della proprietà di linearità con riferimento alla seconda componente.

Sia α il generico scalare reale. Deve risultare verificata la condizione $\varphi(x, \alpha y + y') = \alpha\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$ essendo $x, y\ e\ y'$ tre qualunque elementi di V_2 . Si può porre $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)\ e\ y' = (y'_1, y'_2)$.

Sotto queste condizioni il vettore $\alpha y + y'$ in termini di componenti scalari può essere scritto ponendo $\alpha y + y' = \begin{pmatrix} \alpha y_1 + y'_1 \\ \alpha y_2 + y'_2 \end{pmatrix}$.

Il prodotto scalare a primo membro $\varphi(x, \alpha y + y')$ data la legge di definizione del particolare prodotto scalare che si considera data dalla formula $\varphi(x\ , y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ si può affermare che $\varphi(x, \alpha y + y') = 2x_1(\alpha y_1 + y'_1) + x_1(\alpha y_2 + y'_2) + x_2(\alpha y_1 + y'_1) + x_2(\alpha y_2 + y'_2) = 2x_1\alpha y_1 + 2x_1y'_1 + x_1\alpha y_2 + x_1y'_2 + x_2\alpha y_1 + x_2y'_1 + x_2\alpha y_2 + x_2y'_2$

A meno del riordinamento degli addendi, ammissibile perché in $\mathbb{R}$ vige la proprietà commutativa della somma di numeri reali la relazione

$\varphi(x, \alpha y + y') = 2x_1\alpha y_1 + 2x_1y'_1 + x_1\alpha y_2 + x_1y'_2 + x_2\alpha y_1 + x_2y'_1 + x_2\alpha y_2 + x_2y'_2$ comprova che $\varphi(x, \alpha y + y') = \alpha\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$.

Si è quindi dimostrato che se $x \equiv (x_1, x_2)\ e\ y \equiv (y_1, y_2)$ sono due elementi di V_2 la funzione $\varphi(x\ , y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ è un prodotto scalare associabile all' $\mathbb{R}-$ spazio vettoriale V_2 isomorfo di $\mathbb{R}^2$.

Possono essere fatti ulteriori esempi di prodotti scalari.

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ o nello spazio $\mathbb{C}^n$ e più astrattamente in $\mathbb{K}^n$ (essendo ovviamente $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ viene definito il cosiddetto *prodotto scalare canonico* definito nei termini seguenti:

$\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(x, y) = \big((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, y_i \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$

Se $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$ allora $\varphi(x, y) = \big((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Un ulteriore esempio di prodotto scalare è il seguente

$$\varphi(f, g) = \int_a^b f \cdot \bar{g} = \int_a^b g \cdot \bar{f}$$

Le funzioni f e g sono elementi dell'insieme delle funzioni continue in $[a, b]$ (con $a \leq b$), denotato con $C([a, b], \mathbb{K})$.

L'insieme delle funzioni continue in $[a, b]$ ha struttura di spazio vettoriale. Se f e g sono due elementi di detto insieme allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è elemento di $C([a, b], \mathbb{K})$, è cioè una funzione continua in $[a, b]$ (con $a \leq b$). Ciò vale $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Se $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si ha un $\mathbb{R} - s$pazio vettoriale.

In questo caso particolare detto prodotto scalare è tale che alla coppia (f, g) di funzioni reali di una variabile reale continue in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è associato l'integrale

$$\int_a^b f \cdot g$$

Infatti, risulta che

$\int_a^b f \cdot g = \int_a^b g \cdot f$ ← proprietà di simmetria

$\int_a^b f \cdot g = \int_a^b f^2 \geq 0$ ← forma definita positiva

(Il caso $\int_a^b f^2 = 0$ si ha per $f = 0$ identicamente in $[a, b]$)

Si può scrivere che $\int_a^b f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ identicamente in $[a, b]$.

Occorre quindi considerare le due linearità valide per le funzioni f, g e ϕ tutte continue in $[a, b]$.

Se di pone la corrispondenza $(f, g) \xrightarrow{\varphi} \int_a^b f \cdot g$ si può altresì scrivere che

$(\alpha f + \beta g, \phi) \xrightarrow{\varphi} \int_a^b (\alpha f + \beta g) \cdot \phi$

Per le note proprietà elementari dell'integrale si può scrivere che

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \cdot \phi = \int_a^b \alpha f \phi + \int_a^b \beta g \cdot \phi = \alpha \int_a^b f \phi + \beta \int_a^b g \cdot \phi$$

Pertanto vale la seguente relazione tra prodotti scalari

$$\varphi(\alpha f + \beta g, \phi) = \alpha \varphi(f \phi) + \beta \varphi(g \phi)$$

Vale l'ulteriore condizione di linearità discendente da $(\phi, \alpha f + \beta g)$ $\xrightarrow{\varphi} \int_a^b \phi\,(\alpha f + \beta g)$

Per le note proprietà dell'integrale definito

$$\int_a^b \phi\,(\alpha f + \beta g) = \int_a^b \phi\,\alpha f + \int_a^b \phi\,\beta g = \alpha \int_a^b \phi\, f + \beta \int_a^b \phi\, g =$$

In termini sintetici si ha

$\varphi(\phi\,,\alpha f+\beta g)=\alpha\varphi\,(\phi\,,f)+\beta\varphi(\phi\,,g)$

Tra le due linearità c'e assoluta coerenza ritrovando in esse una evidente giustificazione legata alla simmetria $\varphi(\phi\,,f)=\varphi(f\,,\phi\,)$ e $\varphi(\phi\,,g)=\varphi(g\,,\phi\,)$ vere per il caso che si abbia un $\mathbb{R}$ −spazio vettoriale.

Le cose sono formalmente più complesse se si ha a che fare con un $\mathbb{C}-$ spazio vettoriale. In questo caso, infatti, vige la simmetria hermitiana e risulta $\varphi(\phi\,,f)=\overline{\varphi(f\,,\phi\,)}$ e $\varphi(\phi\,,g)=\overline{\varphi(g\,,\phi\,)}$.

Al riguardo sono di interesse i conseguenti passaggi formali che danno delle simmetrie hermitiane appena ricordate.

Nei termini più generali occorre considerare la coppia ordinata $(a\,,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sotto la condizione $a<b$ e l'insieme $E=C([\,a,\ b],\mathbb{K})$ delle applicazioni continue di dominio $[\,a,\ b]$ su $\mathbb{K}$.

Il prodotto scalare φ può essere definito ponendo

$\varphi:E\times E\ \to\mathbb{K}$ tale che $(f,g)\overset{\varphi}{\to}\int_a^b\bar{f}\cdot g$

Evidentemente se $(f,g)\overset{\varphi}{\to}\int_a^b\bar{f}\cdot g$ si può affermare che $(g\,,f)\overset{\varphi}{\to}\int_a^b\bar{g}\cdot f$

Infatti risulta che $(g\,,f)\overset{\varphi}{\to}\int_a^b\bar{g}\cdot f=\int_a^b\overline{\bar{f}\cdot g}$

Questa ultima eguaglianza è facilmente giustificabile risultando

$\bar{g}\cdot f=\overline{\bar{f}\cdot g}$ in quanto $\overline{\bar{f}\cdot g}=f\cdot\bar{g}=\bar{g}\cdot f$ (questo ultimo passaggio giustificato dalla proprietà commutativa valida in quanto si tratta del prodotto di

due funzioni e non della composizione di due funzioni che in generale non è commutativa).

Ciò premesso, si hanno i seguenti passaggi formali completi

$$\varphi(g\,,f) = \int_a^b \bar{g}\cdot f = \int_a^b \overline{\bar{f}\cdot g} = \overline{\int_a^b \bar{f}\cdot g} = \overline{\varphi(f\,,g)}$$

L'ultimo passaggio si giustifica in quanto $\int_a^b \bar{f}\cdot g = \varphi(f\,,g)$ ed è coerente con la definizione posta. Da $\int_a^b \bar{f}\cdot g = \varphi(f\,,g)$ discende $\overline{\int_a^b \bar{f}\cdot g} = \overline{\varphi(f\,,g)}$.

In definitiva $\varphi(g\,,f) = \overline{\varphi(f\,,g)}$

E' immediato dimostrare la linearità rispetto alla seconda componente per la quale risulta, tenuto conto delle proprietà elementari dell'integrale definito, che

$$\varphi(f,\lambda g+h) = \int_a^b \bar{f}\cdot(\lambda g+h) = \int_a^b \bar{f}\cdot\lambda g + \int_a^b \bar{f}\cdot h = \lambda\int_a^b \bar{f}\cdot g + \int_a^b \bar{f}\cdot h = \lambda\varphi(f,g)+\varphi(f,h)$$

Vale la ulteriore proprietà per la quale

$\varphi(f,f) = \int_a^b \bar{f}\,f = \int_a^b |f|^2$, elemento reale non negativo.

$\varphi(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (f è assunta come funzione continua)

Più in generale è possibile dare una spiegazione della simmetria hermitiana utilizzando la notazione di Einstein, quando si opera con elementi dello spazio $\mathbb{C}^n$. Si tratta come è ben noto di elementi costituiti da una $n-pla$ ordinata di numeri reali. Quindi scrivere $v \in \mathbb{C}^n$ equivale a considerare elementi del tipo $v = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ essendo i vari componenti z_i con $1 \le i \le n$ elementi di $\mathbb{C}$, quindi coppie ordinate di numeri reali.

Come è noto, il contesto hermitiano presuppone una funzione $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ *in ragione della quale* $(v, w) \overset{\varphi}{\rightarrow} \varphi(v, w)$ *che significa che ad ogni coppia ordinata di elementi di* $\mathbb{C}^n$ *è associato uno ed uno solo elemento di* $\mathbb{C}$.

Si parla di prodotto scalare hermitiano. Per come sono state poste le questioni si può affermare che $\varphi(v, w) \in \mathbb{C}$.

Giova ricordare che nel campo $\mathbb{C}$ *ad ogni elemento di detto insieme è associato (univocamente) il cosiddetto numero complesso coniugato. Se è dato il numero complesso* (a, b) *il numero complesso coniugato è il numero* $(a, -b)$. *Assegnato un numero complesso z il numero coniugato (di esso) è il numero indicato con la stenografia* $\bar{z}$. *E' risaputo che utilizzando la notazione algebrica dei numeri complessi il numero complesso coniugato del numero a+ib è il numero complesso a−ib.*

In $\mathbb{C}$ *è evidente che* $z \neq \bar{z}$ *mentre in* $\mathbb{R}$ *è di tutta evidenza che* $r = \bar{r}$ *comunque si prenda r in* $\mathbb{R}$. *Ciò discende dal fatto che i numeri reali sono del tipo (a ,b) con* $b = 0$.

Occorre dare conto della fondatezza della cosiddetta simmetria hermitiana evidenziando che $\forall (v, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ *risulta verificata la condizione*

$$\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)}$$

Se ci si riferisce al prodotto scalare canonico risulta che $\varphi(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{\omega_1}$

E' utile osservare che tale notazione può essere scritta in forma più sintetica all'uopo utilizzando la notazione di Einstein, omettendo quindi il simbolo di sommatoria, con la convenzione formale che sia $\sum_{i=1}^{n} v_i \overline{\omega_1} = v_i \overline{\omega_1}$

Fatta questa premessa ed assunto per ipotesi che sia

$$\varphi(v, w) = v_i \overline{\omega_1}$$

A ben vedere tale eguaglianza declina la stessa quantità con forme equivalenti. Se due numeri sono eguali (uno al primo membro l'altro al secondo), cioè se sono lo stesso numero, tale eguaglianza si conserva considerando, giacchè si opera in $\mathbb{C}$, i rispettivi numeri complessi coniugati.

Tale argomentazione consente di fondare la seguente implicazione (che peraltro, astrattamente, sarebbe una coimplicazione, anche se tale asserzione, ancorchè vera, non è di stretto interesse nell'economia delle considerazioni de quo*):*

$$\varphi(v,w) = v_i\overline{\omega_1} \Rightarrow \overline{\varphi(v,w)} = \overline{v_i\overline{\omega_1}} = \overline{v_1}\omega = \omega\overline{v_1}$$

Si osservi in particolare che $\overline{v_1}\omega = \omega\overline{v_1}$ deriva dalla proprietà commutativa del prodotto di numeri complessi.

Ma $\omega\overline{v_1} = \varphi(\omega\,, v)$. La sequenza dei passaggi è pertanto

$$\overline{\varphi(v,w)} = \overline{v_i\overline{\omega_1}} = \overline{v_1}\omega = \omega\overline{v_1} = \varphi(\omega\,, v)$$

In definitiva, si ha $\overline{\varphi(v,w)} = \varphi(\omega\,, v)$ che formalizza la cosiddetta <u>simmetria hermitiana.</u>

Pertanto si ha

$$\overline{\varphi(v,w)} = \varphi(\omega\,, v) \Leftrightarrow \varphi(v,w) = \overline{\varphi(\omega\,, v)}$$

Può altresì essere utile ricordare che in $\mathbb{C}$ è sempre verificata la relazione

$z = \bar{\bar{z}}$ *(ogni numero complesso è eguale al coniugato del coniugato)*

E' possibile studiare il caso del prodotto scalare canonico a partire da quello reale considerando quindi la funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a valori di $\mathbb{R}$ definita formalmente come segue

$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $(x\,, y) \overset{\varphi}{\to} \varphi(x\,, y) = x_i y_i$ (da intendere nel senso di una sommatoria per i che va da I a n).

La norma associata è $\|x\| = \sqrt{\varphi(x\,, x)} = \sqrt{x_i^2}$ (da intendere in notazione di Einstein). E' evidente che $\sqrt{x_i^2} \in \mathbb{R}^+$. $\sqrt{\varphi(x\,, x)} \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Il prodotto scalare è additivo rispetto alla prima componente. Siano $x\,, y\ e\ w$ tre distinti elementi di $\mathbb{R}^n$. Detta proprietà viene declinata scrivendo che

$$(x + y\,, w) = (x, w) + (y\,, w)$$

Utilizzando la notazione di Einstein, si può scrivere che

$$(x_i{+}y_i)(w_i) = (x_i w_i) + (y_i w_i)\ da\ cui\ \ (x + y\,, w) = (x, w) + (y\,, w)$$

Analogamente si dimostra che

$$(x, w) + (y\,, w) = (x + y\,, w)$$

La seconda proprietà è l'omogeneità rispetto alla prima variabile, formalizzata ponendo

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y)\ \text{con}\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Si può scrivere, sempre utilizzando la notazione di Einstein, che $(\alpha x_i)(y_i) = \alpha(x_i y_i)$

Si osservi che ulteriormente si può porre $(\alpha x_i)(y_i) = \alpha(x_i y_i) = x_i(\alpha y_i)$

Pertanto, con riferimento al caso considerato si può affermare che

$$(\alpha x, y) = (x, \alpha y\ ) = \alpha(x, y)$$

Questa estensione contempla la omogeneità rispetto alla seconda variabile.

Vale altresì la proprietà di additività rispetto alla seconda componente (variabile). Per essa si può scrivere che

$$(x\,, y + w) = (x, y) + (x, w)$$

Sempre utilizzando la notazione di Einstein si ha

$$x_i(y_i + w_i) = (x_i y_i) + (x_i w_i)$$

Il prodotto scalare come definito è bilineare, cioè lineare rispetto ad ognuna delle due componenti.

Vale la proprietà di simmetria commutativa per la quale

$(x\,, y) = (y, x)$ in quanto vige la proprietà commutativa del prodotto in $\mathbb{R}$.

Infatti, in notazione di Einstein si può scrivere

$$x_i y_i = y_i x_i$$

In parole povere la sommatoria dei due membri esprime lo stesso numero reale in quanto somma di termini che sono eguali per la proprietà commutativa del prodotto di numeri reali.

Il prodotto scalare canonico è definito positivo risultando $\forall x : x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ che $(x\,, x) > 0$ in quanto $x_i^2 > 0\ \forall x_i \in \mathbb{R}$. Ciò evidentemente vale al variare di i interno assoluto tale che $1 \leq i \leq n$ (essendo n la dimensione dello spazio vettoriale che si utilizza).

Si è soliti affermare che il prodotto scalare canonico è non degenere risultando $\forall y : y\ \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ vero che $(y\,, x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Occorre, al riguardo, dimostrare le due implicazioni

$(y\,,x) = 0 \;\Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

$x = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow (y\,,x) = 0$

essendo vero che

$$\begin{pmatrix}(y\,,x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}\\ x = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow (y\,,x) = 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left((y\,,x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}\right)$$

E' possibile trattare la prima implicazione sempre utilizzando la notazione di Einstein. Deve essere vero per ipotesi che

$y_i x_i = 0$ .Si supponga $y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. In generale esistono $k \leq n$ componenti di y diverse da 0. Esiste sicuramente un vettore y (in realtà ne esistono infiniti) per il quale sia $y_i \neq 0$. Con riferimento a questo caso particolare, in realtà infiniti casi, $y_i x_i = 0$ impone sia $x_i = 0$ identicamente.

La seconda implicazione, cioè $x = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow (y\,,x) = 0$ è triviale in quanto se $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ deve essere $x_i = 0$ al variare di i. In notazione di Einstein si ha

$y_i x_i = y_i \cdot 0 = 0$ (ex legge di annullamento del prodotto).

Vale infine una ulteriore nota proprietà per la quale si può scrivere che

$(x\,,x) = 0 \iff x = 0$

Detta coimplicazione è scindibile nelle due seguenti implicazioni

$(x\,,x) = 0 \;\Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow (x\,,x) = 0$

La prima implicazione $\big((x\,,x)=0\Rightarrow x=0\ \big)$ può essere scritta affermando che $x_ix_i=x_i^2=0$. Trattandosi di una somma tutti gli addendi del tipo x_i^2 devono essere eguali a 0 e quindi deve essere identicamente vero che $x_i=0$. Ma affermare ciò equivale ad ammettere che $x=0_{\mathbb{R}^n}=(0\,,0,\ldots.0)$.

La seconda implicazione, cioè $x=0\Rightarrow(x\,,x)=0$ è di tutta evidenza. Infatti, se $x=0$ si ha $x_i=0$ identicamente quindi in notazione di Einstein $x_ix_i=x_i^2=0^2=0$.

Un prodotto scalare può essere rappresentato in forma matriciale utilizzando una matrice simmetrica. Si può infatti scrivere che

$$(x,y)=y^TSx$$

Ad esempio il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$ è ponibile in forma matriciale come segue

$$(x,y)=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)$$

Nella manualistica viene sovente riportato il prodotto scalare tipico della teoria della relatività ristretta che definisce lo spazio-tempo di Einstein del tipo $\mathbb{R}^{3+1}$ dove 3 è riferito alle componenti spaziali e I è riferito alla coordinata temporale che complessivamente definiscono un evento nello spazio-tempo.

Per esso si ha $(x\,,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_2-t\tau$ quando gli eventi nello spazio-tempo sono $(x_1,x_2,x_3,t\,)$ e $(y_1,y_2,y_3,\tau\,)$.

Queste esemplificazioni, specificatamente riferite a $\mathbb{R}^n$ sono estensibili a spazi vettoriali aventi oggetti distinti dai punti dello spazio $n-$dimensionale.

Già si è parlato della simmetria hermitiana. Occorre ora formalizzare la definizione di *prodotto scalare hermitiano canonico* inteso come una funzione che associa ad una coppia di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ un elemento di $\mathbb{C}$.

Formalmente si può scrivere che

$\varphi_H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \quad | \varphi_H(x,y) = x_i \overline{y}_i$ da intendersi in notazione di Einstein.

Sia da studiare $\varphi_H(x,x)$. Per la definizione data risulta che il prodotto scalare hermitiano in notazione di Einstein può essere posto nella forma

$\varphi_H(x,x) = x_i \overline{x}_i$

Ognuno degli elementi $x_i \overline{x}_i$ è un numero reale e la somma finita di numeri reali positivi è un numero reale positivo. Infatti per ogni $1 \leq i \leq n$ si hanno relazioni del tipo $x_i \overline{x}_i \in \mathbb{R}^+$. Pertanto è ben definita la radice quadrata di $\varphi_H(x,x) = x_i \overline{x}_i$ potendo affermare che $\sqrt{\varphi_H(x,x)} > 0$ quando $x \in \mathbb{C}^n - \{0_{\mathbb{C}^n}\}$.

Con le precisazioni fatte e con un formalismo più snello è possibile formalizzare la norma associata al prodotto scalare canonico hermitiano ponendo

$\|x\| = \sqrt{(x\,,x)} = \sqrt{|x_i|^2} \geq 0$ (da intendersi in notazione di Einstein)

Vale $|x_i|^2 = 0$ quando $x = 0_{\mathbb{C}^n}$. E' utile dare conto del fatto che nella formulazione della nozione di norma associata al prodotto scalare canonico si è utilizzata la nozione di valore assoluto di un numero complesso. Ciò deriva dalla definizione stessa di prodotto scalare hermitiano.

Infatti per ogni $i \leq n$ risulta $x_i\overline{x_i} = (a_i + ib_i)(a_i - ib_i) = a_i^2 - (ib_i)^2 = a_i^2 - (i)^2(b_i)^2 = a_i^2 - (-1)(b_i)^2 = a_i^2 + b_i^2$.

E' noto che $|x_i| = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ da cui $|x_i|^2 = a_i^2 + b_i^2$

Quindi è lecita la sostituzione $x_i\overline{x_i} = |x_i|^2$.

Della simmetria hermitiana già si è detto.

Occorre dare conto di una ulteriore proprietà rilevante, la cosiddetta anti-omogeneità riferita alla seconda componente.

Per essa risulta che

$$(x\,, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y) \;\; \forall\, (x\,, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n\,, \forall \alpha \;\in\; \mathbb{C}$$

Infatti, per la definizione di prodotto scalare hermitiano, sempre utilizzando la notazione di Einstein, si ha

$$(x\,, \alpha y) = x_i\overline{\alpha y_i} = \bar{\alpha} x_i y_i = \bar{\alpha}(x_i y_i) = \bar{\alpha}(x, y) \text{ c.v.d.}.$$

In generale, in ogni spazio vettoriale metrico V la norma è definibile come segue

$$\|\,.\,\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \quad | \, \|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Può essere definito un particolare oggetto matematico chiamato *nucleo del prodotto scalare* assegnato.

Se E è lo spazio vettoriale che si considera, il nucleo del prodotto scalare di cui è munito lo spazio vettoriale metrico E, denotato con il formalismo $E^{\perp}$, è l'insieme i cui elementi sono gli $x \in E$ tali che comunque si prenda un $y \in E$ risulti verificata la condizione $(x, y) = 0$.

Evidentemente deve essere vero che $x \neq y$. Infatti, se $x = y$ non può essere vero che $(x, x) = 0$.

Formalmente si pone $E^{\perp} = \{x \in E : (x, y) = 0 \; \forall y \in E\}$

Occorre dimostrare che $E^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di E.

E' innanzitutto evidente che $0_E \in E^{\perp}$. Infatti, se $x = 0_E$ per la definizione di prodotto scalare canonico in notazione di Einstein si può porre

$(x, y) = (0_E, y) = 0_{\mathbb{K}} \cdot y_i = (0_{\mathbb{K}})_i$ identicamente per $1 \leq i \leq n$.

Sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e sia $(x, x') \in E \times E$ (con $x \neq x'$) essendo altresì vero che $(x, x') \in E^{\perp} \times E^{\perp}$.

Per completare la dimostrazione della struttura di $E^{\perp}$ come spazio vettoriale occorre dimostrare che pure il vettore $\alpha x + \beta x'$ è un elemento di $E^{\perp}$.

Deve quindi essere vero che $(\alpha x + \beta x', y) = 0$. Se si ammette vero che $(\alpha x + \beta x', y) = 0$ deve ammettersi altresì vero che $(y, \alpha x + \beta x') = 0$

Ragionando su questa ultima forma si ha $(y, \alpha x + \beta x') = (y, \alpha x) + (y, \beta x') = \bar{\alpha}(y, x) + \bar{\beta}(y, x') = \bar{\alpha} \cdot 0 + \bar{\beta} \cdot 0 = 0$.

Infatti per la simmetria hermitiana $(y, x) = \overline{(x, y)} = 0_{\mathbb{K}}$ ed anche $(y, x') = \overline{(x', y)}$.

In $\mathbb{C}$ risulta $x = \bar{x} \Leftrightarrow 0_{\mathbb{C}}$ e in generale $x \neq \bar{x} \; \forall x \in \mathbb{C} - \{0_{\mathbb{C}}\}$.

in lavorazione

E' utile ribadire che uno *spazio prehilbertiano reale* è definito dalla coppia ordinata $(E\ ,\varphi)$ essendo E un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale e φ un prodotto scalare definito su di esso. Uno spazio prehilbertiano reale è detto anche spazio euclideo.

Uno *spazio prehilbertiano complesso* è definito dalla coppia ordinata $(E\ ,\varphi)$ essendo E un $\mathbb{C}-$ spazio vettoriale e φ un prodotto scalare definito su di esso. Uno spazio prehilbertiano complesso è detto anche spazio *hermitiano.*

Detti spazi sono di dimensione intera finita.

Proprietà della forma quadratica ϕ associata al prodotto scalare φ

Sia assegnato un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale con φ e ϕ un prodotto scalare e la forma quadratica ad esso associato.

Comunque si prenda la coppia ordinata $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\quad\forall\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\qquad\forall\,(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p)\in\mathbb{K}^p\qquad,\quad\mathbb{N}\qquad\forall\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E^n,\ \forall\,(y_1,y_2,\dots,y_n)\in E^p$ risulta verificata l'eguaglianza

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\ \ ,\sum_{j=1}^{p}\mu_j y_j\right)=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\bar{\lambda_\iota}\,\mu_j\varphi(x_i\ ,y_j)$$

in lavorazione

Sono di estremo interesse le seguenti proprietà delle forme quadratiche vere quando $\forall\,(x\ ,y)\in E\ \times E$ e $\forall\,(\alpha\ ,\beta)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ essendo $\phi(x)=\varphi(x,x)$

$$\phi(\alpha x+\beta y)=|\alpha|^2\phi(x)+2Re\big(\bar{\alpha}\,\beta\varphi(x,y)\big)+|\beta|^2\phi(y)$$

$\phi(\alpha x) = |\alpha|^2 \phi(x)$

$\phi(x+y) = \phi(x) + 2Re\big(\varphi(x,y)\big) + \phi(y)$

$\phi(x+y) + \phi(x-y) = 2(\phi(x) + \phi(y)\ )$

E' sicuramente utile partire dalla dimostrazione di $\phi(\alpha x) = |\alpha|^2 \phi(x)$

Si ha che $\phi(\alpha x) = |\alpha|^2 \phi(x) \Rightarrow \varphi(\alpha x,\ \alpha x) = \alpha\bar{\alpha}\ \varphi(x,x) = |\alpha|^2 \varphi(x,x)$

Quindi $\phi(\alpha x) = |\alpha|^2 \varphi(x,x)$

Occorre ora dimostrare che

$\phi(\alpha x + \beta y) = |\alpha|^2 \phi(x) + 2Re\big(\bar{\alpha}\,\beta\varphi(x,y)\big) + |\beta|^2 \phi(y)$

Infatti si ha che $\phi(\alpha x + \beta y) = \varphi(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\ ) = \varphi(\alpha x, \alpha x) + \varphi(\alpha x, \beta y\ ) + \varphi(\beta y\ , \alpha x\ ) + \varphi(\beta y, \beta y\ ) = |\alpha|^2 \phi(x) + \alpha\bar{\beta}\ \varphi(x,y) + \beta\bar{\alpha}\varphi(y,x) + |\beta|^2 \phi(x)$.

Occorre evidenziare che $\varphi(\beta y\ , \alpha x\ ) = \overline{\varphi(\alpha x, \beta y\ )} = \overline{\alpha\bar{\beta}\ \varphi(x,y)} = \bar{\alpha}\,\beta\overline{\varphi(x,y)}$.

Pertanto si ha $\phi(\alpha x + \beta y) = \varphi(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\ ) = \varphi(\alpha x, \alpha x) + \varphi(\alpha x, \beta y\ ) + \varphi(\beta y\ , \alpha x\ ) + \varphi(\beta y, \beta y\ ) = |\alpha|^2 \phi(x) + \alpha\bar{\beta}\ \varphi(x,y) + \overline{\varphi(\alpha x, \beta y\ )} + |\beta|^2 \phi(x) = |\alpha|^2 \phi(x) + \alpha\bar{\beta}\ \varphi(x,y) + \overline{\alpha\bar{\beta}\ \varphi(x,y)} + |\beta|^2 \phi(x) = |\alpha|^2 \phi(x) + \alpha\bar{\beta}\ \varphi(x,y) + \bar{\alpha}\ \beta\overline{\varphi(x,y)} + |\beta|^2 \phi(x)$

Possono essere fatte le seguenti osservazioni sui numeri complessi $\alpha\bar{\beta}\ e\ \bar{\alpha}\ \beta$, essendo $\alpha\ e\ \beta$ elementi qualunque di $\mathbb{C}$.

In generale il numero $\alpha\bar{\beta}$ è un numero complesso. Infatti, posto $\begin{cases}\alpha = a + ib \\ \beta = c + id\end{cases}$ essendo $a, b, c\ , d$ elementi di $\mathbb{R}$ risulta che $\alpha\bar{\beta} = (a + ib)(c - id) = (ac + bd\ , bc - ad) = \omega$.

Per quanto posto risulta altresì vero che $\bar{\alpha}\ \beta = \beta\bar{\alpha} = (c + id)(a - ib) = (ac + bd\ , ad - bc)$. Detto numero complesso la medesima parte reale di ω e seconda componente della coppia ordinata opposta. E' quindi di tutta evidenza che $\bar{\alpha}\ \beta = \beta\bar{\alpha} = \bar{\omega}$ essendo $\omega = \alpha\bar{\beta}$

Pertanto, a questo punto, si può porre

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \varphi(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\ ) = \cdots . = |\alpha|^2\phi(x) + \omega\ \varphi(x, y) + \bar{\omega}\overline{\varphi(x, y)} + |\beta|^2\phi(x)$$

E' immediato osservare che se $\varphi(x, y) = \lambda\ \in \mathbb{C}$ allora $\overline{\varphi(x, y)} = \bar{\lambda}$

Pertanto si può scrivere che $\phi(\alpha x + \beta y) = \varphi(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\ ) = \cdots . = |\alpha|^2\phi(x) + \omega\ \lambda + \bar{\omega}\bar{\lambda} + |\beta|^2\phi(x) = |\alpha|^2\phi(x) + \omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda} + |\beta|^2\phi(x)$ ciò in quanto, come è di tutta evidenza, risulta vero che $\bar{\omega}\bar{\lambda} = \overline{\omega\lambda}$.

Sia $\omega\ \lambda = (r, s) : (r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ allora $\overline{\omega\lambda} = (r\ , -s)$. E' di tutta evidenza che la quantità $\omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda}$ è un numero reale comunque sia $(\omega\ , \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Infatti, in termini di coppie ordinate si può scrivere che

$$\omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda} = (r, s) + (r\ , -s) = (2r, 0)$$

Pertanto il numero complesso $\omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda}$ è in realtà il numero reale $2r$ che risulta eguale a due volte la parte reale del numero complesso assegnato.

Quindi, si può scrivere che $\omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda} = 2\ Re(\omega\ \lambda)$

Se si opera con scalari reali è di tutta evidenza che $\omega\ \lambda = \overline{\omega\lambda}$.

Due numeri complessi coniugati hanno la medesima parte reale pertanto deve risultare $\omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda} = 2\ Re(\overline{\omega\ \lambda})$

Che la somma dei numeri $\omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda}$ sia reale lo prova immediatamente l'utilizzo della forma algebrica dei numeri complessi. Infatti, posto $\omega\ \lambda = t + is$ con t ed s numeri reali si ha $\overline{\omega\lambda} = t - is$. Sommando si ha $\omega\ \lambda + \overline{\omega\lambda} = t + is + t - is = 2t \in \mathbb{R}$ quanto $t \in \mathbb{R}$.

Occorre ora dimostrare che $\phi(x+y) = \phi(x) + 2Re\big(\varphi(x,y)\big) + \phi(y)$

Infatti, si può porre $\phi(x+y) = \varphi(x+y,\ x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \overline{\varphi(x,y)} + \varphi(y,y)$

Se si pone $\varphi(x,y) = a + ib$ allora $\overline{\varphi(x,y)} = a - ib$ Pertanto si può porre

$$\phi(x+y) = \varphi(x,x) + 2a + \varphi(y,y)$$

Ma per quanto si è posto risulta $\phi(x+y) = \phi(x) + 2Re\big(\varphi(x,y)\big) + \phi(y)$ in quanto $2a = 2Re\big(\varphi(x,y)\big)$ avendo posto $\varphi(x,y) = a + ib$.

In definitiva $\phi(x+y) = \phi(x) + 2Re\big(\varphi(x,y)\big) + \phi(y)$.

In modo del tutto analogo si dimostra che $\phi(x-y) = \phi(x) - 2Re\big(\varphi(x,y)\big) + \phi(y)$.

Infatti, si può scrivere che

$$\phi(x-y)=\varphi(x-y,x-y)=\varphi(x,x)+\varphi(x,-y)+\varphi(-y\,,x)+$$
$$\varphi(-y,-y)=\phi(x)+1\cdot\overline{(-1)}\,\varphi(x\,,y)+(-1)\bar{1}\varphi(y\,,x)+\phi(y)$$

La formula considerata può essere semplificata poiché si opera in un contesto di scalari reali. Se si hanno scalari reali risulta che $r=\bar{r}\;\forall\; r\;\in\mathbb{R}$.

La formula in oggetto diviene $\phi(x-y)=\phi(x)+1\cdot(-1)\cdot\;\varphi(x\,,y)+(-1)\cdot 1\cdot\varphi(y\,,x)+\phi(y)=\phi(x)-\;\varphi(x\,,y)-\varphi(y\,,x)+\phi(y)$

A questo punto sovviene la simmetria hermitiana per la quale $\varphi(y\,,x)=\overline{\varphi(x\,,y)}$.

Ciò posto, si ha $\phi(x-y)=\phi(x)-\;\varphi(x\,,y)-\overline{\varphi(x\,,y)}+\phi(y)=\phi(x)-\big(\varphi(x\,,y)+\overline{\varphi(x\,,y)}\big)+\phi(y)$

Occorre ora ragionare sul numero $\big(\varphi(x\,,y)+\overline{\varphi(x\,,y)}\big)$ *essendo* $\varphi(x\,,y)\in\mathbb{C}$. *Si tratta della somma di due numeri coniugati. Posto* $\varphi(x\,,y)=(a\,,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *utilizzando la forma algebrica dei numeri complessi e ricordando il rapporto di coniugio tra i due numeri complessi assegnati risulta che*

$$\varphi(x\,,y)+\overline{\varphi(x\,,y)}=a+ib+a-ib=2a$$

In definitiva risulta di tutta evidenza che $\varphi(x\,,y)+\overline{\varphi(x\,,y)}=2Re[\varphi(x\,,y)]$.

Si può pertanto scrivere che $\phi(x-y)=\phi(x)-2Re[\varphi(x\,,y)]\;+\phi(y)$, *cv.d.* .

Si ha la seguente ulteriore proprietà per la quale

$$\phi(x+y)+\phi(x-y)=2\big(\phi(x)+\phi(y)\big)$$

Ad essa si perviene banalmente sommando membro a membro le ultime due relazioni come del resto suggerisce il primo membro dell'ultima proprietà considerata.

Vanno altresì ricordate le cosiddette formule di polarizzazione che mettono in relazione il prodotto scalare $\varphi(x\ ,y)$ *con particolari forme quadratiche associate.*

φ *è detta forma polare di* ϕ*.*

Sia dato lo spazio vettoriale prehilbertiano reale $(E\ ,\varphi)$ *e siano x ed y elementi di E.*

Risulta che $\forall\ (x\ ,y) \in E \times E$ *sono valide le seguenti eguaglianze dette identità di polarizzazione*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ [\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)]$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\ [\phi(x+y) - \phi(x-y)]$$

Diseguaglianze e norme euclidee

Osservazioni introduttive

Un $\mathbb{K}$ −spazio vettoriale è detto *spazio vettoriale metrico* se dato un prodotto scalare hermitiano definito positivo – cioè tale che $\forall x\ \in E$ risulta $\varphi(\ x,x) > 0$ quando $x \neq 0_E$ – è definita una norma che associa ad ogni elemento $x\ \in E$ un numero reale non negativo $\|x\|$.

Se $\varphi(\ x,x) \neq 0$ quando $x \neq 0_E$ si ha un prodotto scalare non degenere.

Se $\varphi(\ x,x) \neq 0$ quando $x \neq 0_E$ comunque si prenda un $\omega \neq 0_E$ vale la seguente coimplicazione

$$\varphi(\ x\ ,\omega) = \varphi(\ x'\ ,\omega) \Leftrightarrow x = x'$$

Poiché si ha per ipotesi un prodotto scalare non degenere l'unico elemento di E che risulta ortogonale ad ogni altro elemento di E è il vettore 0_E .

Se $x = x'$ comunque si prenda $\omega \in E$ risulta $\varphi(x, \omega) = \varphi(x', \omega)$ quindi si evince che $x = x' \Rightarrow \varphi(x, \omega) = \varphi(x', \omega)$.

Occorre ora dimostrare che $\varphi(x, \omega) = \varphi(x', \omega) \Rightarrow x = x'$

Poiché il prodotto scalare è non degenere la condizione $\varphi(v, \omega) = 0 \; \forall \omega \in E$ e quindi in generale anche per ogni $\omega \neq 0_E$ è garantita per $v = 0_E$

Detta situazione può essere scritta in termini di differenza di due elementi non nulli di E ponendo la condizione formale

$$\left(\varphi(v, \omega) = 0_{\,\omega \neq 0_E}\right) \equiv \left(\varphi(0_E, \omega) = 0_{\,\omega \neq 0_E}\right)$$

Si può porre $0_E = x - x'$

Calcolando il prodotto scalare $\varphi(x - x', \omega) = 0 = \varphi(x, \omega) - \varphi(x', \omega) = 0 \Rightarrow \varphi(x, \omega) = \varphi(x', \omega)$.

I passaggi formali possono essere svolti a ritroso scrivendo che

$$\varphi(x, \omega) = \varphi(x', \omega) \Rightarrow \varphi(x, \omega) - \varphi(x', \omega) = 0 \Rightarrow \varphi(x - x', \omega) = 0 \equiv \varphi(0_E, \omega) = 0_{\,\omega \neq 0_E} \Rightarrow x - x' = 0_E \Rightarrow x = x' \neq 0_E$$

La condizione è verificata $\forall (x, x') \in E \times E \; : \; x = x'$

Negli spazi metrici è istituita la seguente relazione fondamentale tra la distanza d e la norma $\| \, . \, \|$ con la relazione già considerata

$$d(x, y) = \|y - x\| \geq 0 \quad \forall (x, y) \in E \times E$$

E', a questo punto, sicuramente utile coordinare gli esiti con la nozione di prodotto scalare, già ampiamente utilizzata.

Al riguardo, giova osservare che una formula particolarmente utile è la seguente

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$$

Un esempio banale è dato dallo spazio $\mathbb{R}^2$ nel quale – considerato un generico elemento x di esso – il prodotto scalare canonico

$\varphi(x,x) = x_1x_1 + x_2x_2 = x_1^2 + x_2^2 > 0$ quando $x \neq (0\ ,0)$

Ovviamente $\varphi(x,x) = 0$ quando $x = (0\ ,0)$.

In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare canonico è dato dalla forma definita positiva declinata come segue:

$\varphi(x,x) = x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots . + x_nx_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0$ quando $x \neq (0\ ,0)$ mentre $\varphi(x,x) = 0$ quando $x = 0_{\mathbb{R}^n} = (0\ ,0, \ldots\ldots ,0)$.

Da $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$ si possono ottenere, con semplici passaggi algebrici, tutte le proprietà tipiche delle norme.

Così, ad esempio, comunque si prenda $\alpha \in \mathbb{K}$ che

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\varphi(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}\varphi(x,x)} = \sqrt{|\alpha|^2\varphi(x,x)} = |\alpha|\sqrt{\varphi(x,x)}$$

In sintesi, si può scrivere $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Se $x = 0$ si ha $\varphi(x,x) = 0$ e trattandosi di prodotto scalare non degenere risulta $x = 0_V$. Pertanto $\|0_V\| = \sqrt{\varphi(0_V, 0_V)} = 0$.

Il prodotto interno si presta a gestire una ulteriore rilevante proprietà delle norma, la cosiddetta e già ricordata diseguaglianza triangolare per la quale deve risultare che

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Poiché si è assunto $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$ si può porre $\|x\|^2 = \left(\sqrt{\varphi(x,x)}\right)^2 = \varphi(x,x)$.

La relazione triangolare può essere riscritta ad evidenziare che si tratta comunque di una diseguaglianza tra grandezze non negative, espresse quindi da elementi di $\mathbb{R}_0^+$.

Si ha $0 \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Si può porre $\|x + y\| = \sqrt{\varphi(x + y, x + y)}$

Elevando al quadrato ambo i membri si ha

$\|x + y\|^2 = \left(\sqrt{\varphi(x + y, x + y)}\right)^2$ da cui

$$\|x + y\|^2 = \varphi(x + y, x + y)$$

Sviluppando il secondo membro si ottiene una relazione nota

$$\phi(x + y) = \phi(x) + 2Re\big(\varphi(x,y)\big) + \phi(y) \geq 0$$

Pertanto risulta $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\varphi(x,y))$

Se $Re(\varphi(x,y)) = 0$ cioè se $\varphi(x,y) = 0$ i vettori $x \; ed \; y$ sono ortogonali e si ottiene la relazione $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ detta teorema di Pitagora generalizzato. In questo caso si scrive $x \perp y$.

Se $\varphi(x,y) > 0$ è di tutta evidenza la relazione $\|x+y\|^2 < \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Se $\varphi(x,y) < 0$ come può legittimamente essere si ha

$$\|x+y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2Re(\varphi(x,y)) < 0$$

quindi risulta $\|x+y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2) < 0$ ed anche in questo caso

$$\|x+y\|^2 < \|x\|^2 + \|y\|^2$$

In definitiva, in ogni caso deve risultare $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

La diseguaglianza triangolare può essere posta nella forma

$$\|x+y\| = \sqrt{\varphi(x+y,x+y)}$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

o, in forma equivalente, $\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$

Elevando al quadrato si ha $\left(\sqrt{\varphi(x+y,x+y)}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}\right)^2$

da cui si ottiene $\varphi(x+y,x+y) \leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$

$\Rightarrow \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y) +$

$2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \Rightarrow \varphi(x,y) + \overline{\varphi(x,y)} \leq 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$

In definitiva si ottiene $2Re\varphi(x,y) \leq 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ da cui $Re\varphi(x,y) \leq$

$\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$

Se $x \perp y$ si ha $\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow Re\varphi(x,y) = 0$ e pertanto

$$Re\varphi(x,y) = 0 < \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \ \forall (x\,,y) \in V \times V : (x\,,y) \neq (0_V, O_V).$$

E' poi evidente che il caso triviale $x = y = 0_V$ conduce alla identità

$0 = 0$

Un ulteriore caso di interesse è quello per il quale i vettori $(x\ , y) \in V \times V$ sono linearmente dipendenti cioè quando si può affermare che esiste uno scalare $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ per il quale si possa affermare che $y = \alpha x$ con, come appena detto, $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Sotto questa ipotesi particolare, la diseguaglianza triangolare formulata in termini di relazione tra norme $\sqrt{\varphi(x+y, x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$ è , per sostituzione in formula, descritta dalla seguente relazione

$$\sqrt{\varphi(x+\alpha x, x+\alpha x)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(\alpha x, \alpha x)}$$

Anche in questo caso si può elevare al quadrato avendo che

$$\varphi(x+\alpha x, x+\alpha x) \leq \varphi(x,x) + \varphi(\alpha x, \alpha x) + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x, \alpha x)}$$

$$\varphi(x,x) + \varphi(x,\alpha x) + \varphi(\alpha x, x) + \varphi(\alpha x, \alpha x) \leq \varphi(x,x) + \varphi(\alpha x, \alpha x) + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x, \alpha x)}$$

Pertanto, si può scrivere che

$$\varphi(x,\alpha x) + \varphi(\alpha x, x) \leq 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x, \alpha x)}$$

Ma per la simmetria hermitiana il primo membro può essere riscritto in termini somma di numeri complessi coniugati – costituendo quindi un numero reale.

Si ha

$$\varphi(x,\alpha x) + \overline{\varphi(x,\alpha x)} \leq 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x, \alpha x)}$$

Si può operare sul secondo membro $2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x, \alpha x)} = 2\sqrt{\varphi(x,x)\alpha\bar{\alpha}\varphi(x,x)} = 2\sqrt{\varphi(x,x)|\alpha|^2\varphi(x,x)} = 2|\alpha|\varphi(x,x)$

A questo punto si perviene ad una relazione del tipo

$2(Re\varphi(x,\alpha x)) \leq 2|\alpha|\varphi(x,x)$ da cui $Re\varphi(x,\alpha x) \leq |\alpha|\varphi(x,x)$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}\ si\ ha\ \ \varphi(x,\alpha x) = \bar{\alpha}\varphi(x,x) = \alpha\varphi(x,x)$

Si ottiene un risultato evidente in $\mathbb{R}$ e cioè che $\alpha \leq |\alpha|$

La diseguaglianza di Cauchy – Schwarz – Bouniakosky.

Dato lo spazio prehilbertiano (E,φ) comunque si prendano due elementi $x\ e\ y$di E vale la seguente *diseguaglianza*, detta *di Cauchy – Schwarz – Bouniakosky*

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)\ \forall(x\ ,y) \in E \times E$$

Detta diseguaglianza può essere riscritta ponendo

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \phi(x)\phi(y)\ \ \forall(x\ ,y) \in E \times E$$

(Occorre ricordare che $\phi(x) \equiv \varphi(x,x)$*)*

Vi è un innegabile nesso tra la diseguaglianza triangolare e la diseguaglianza in oggetto.

Infatti, data per ipotesi vera la diseguaglianza triangolare si ottiene una relazione che riconduce alla diseguaglianza di C – S – B.

La diseguaglianza triangolare $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *può essere elevata al quadrato ottenendo una forma equivalente quale la seguente*

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\varphi(x,y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$2\varphi(x,y) \leq 2\|x\|\|y\|$$

$$\varphi(x,y) \leq \|x\|\|y\|$$

Non è infrequente trovare il prodotto scalare $\varphi(x,y)$ *nella forma equivalente (quanto a significato)* (x,y). *Posto* $\varphi(x,y) \equiv (x\ ,y)$ *la precedente relazione diviene*

$$(x,y) \leq \|x\|\|y\|$$

Se $x = y = 0_E$ *si ha* $(0_E\ ,0_E) \leq \|0_E\|\|0_E\| \to 0 = 0$ *(dove il simbolo* $\to$ *deve essere inteso come "si ottiene").*

In generale, $(x,y) \neq 0$ *quando* $(x,y) \neq \begin{cases} (x,y) \neq (0_E\ ,0_E) \\ (x,y) \neq (x\ ,0_E) : x \neq 0_E \\ (x,y) \neq (0_E, y) : y \neq 0_E \end{cases}$

In disparte il caso banale $(x,y) = 0$ *se* $(x,y) > 0$ *la diseguaglianza* $(x,y) \leq \|x\|\|y\|$ *può essere scritta nella forma equivalente* $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ *risultando lecito elevare al quadrato ad ottenere una ulteriore relazione pure equivalente a quella data.*

Si ha $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \Rightarrow |(x,y)|^2 \leq (\|x\|\|y\|)^2 = \|x\|^2\|y\|^2$

In definitiva, si può scrivere $|(x,y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

Ma, data la relazione tra norma di un elemento di E e forma definita positiva si ha

$$|(x,y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 = \varphi(x,x)\varphi(y,y) = \phi(x)\phi(y)$$

Si ha quindi $|(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y) = \phi(x)\phi(y)$

(Si è utilizzata la relazione $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$ *tenuto conto che* $\varphi(x,x) \equiv \phi(x)$*)*

Occorre però osservare che questa è solo una parte della dimostrazione in quanto sfugge il caso sempre possibile per il quale sia $\varphi(x,x) < 0$.

Questo caso è sostanzialmente banale in parte qua si deve osservare che se $\varphi(x,x) < 0$ *la diseguaglianza stretta è evidente in quanto* $\|x\|\|y\| > 0$ *in quanto* $\begin{cases}\|x\| > 0 \\ \|y\| > 0\end{cases}$ *per la definizione stessa di norma di elementi di uno spazio vettoriale.*

Il problema si pone se si vuole passare alla diseguaglianza di C – S – B nel caso sia $\varphi(x,y) < 0$ *in quanto tale condizione non rende valida la implicazione*

$$(x,y) \leq \|x\|\|y\| \Rightarrow (x,y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

Se è $\varphi(x,y) < 0$ *allora risulta* $|\varphi(x,y)| = -\varphi(x,y) > 0$

Pertanto $\begin{cases}|\varphi(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \\ \varphi(x,y) < 0\end{cases}$ *equivale a* $-\varphi(x,y) \leq \|x\|\|y\|$

Risulta pertanto che $0 \leq -\varphi(x,y) \leq \|x\|\|y\|$ *che può essere elevata al quadrato ponendo* $(-\varphi(x,y))^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ *da cui* $(-\varphi(x,y))\big(-\varphi(x,y)\big) \leq \|x\|^2\|y\|^2$ *e quindi* $(-1)^2(\varphi(x,y))^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ *da cui* $(\varphi(x,y))^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ *ed equivalentemente* $|\varphi(x,y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

In definitiva risulta che la diseguaglianza $|\varphi(x,y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ *è sempre verificata.*

Ulteriori osservazioni sulle forme definite positive e sulla diseguaglianza triangolare

Sovente la diseguaglianza triangolare viene formalizzata in una forma che di fatto coordina due distinte diseguaglianze, quale la seguente

$$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Si osserva che la presenza del valore assoluto nel primo termine consente di affermare che tutti i termini delle (di fatto) due diseguaglianze sono numeri reali non negativi. Si può pertanto scrivere che

$$|\|v\| - \|w\||^2 \leq \|v - w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2Re(\varphi(v,w) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\|$$

Si ottiene un risultato già trovato e noto per il quale

$$-2\|v\|\|w\| \leq 2Re(\varphi(v,w) \leq 2\|v\|\|w\|$$

In altri termini

$$|Re(\varphi(v,w)| \leq \|v\|\|w\|$$

Partire dalle due diseguaglianze considerate, costituite, come già detto, da termini tutti non negativi, ed elevarle al quadrato garantisce la conservazione del segno $\geq$ ottenendo una relazione già verificata e vera *icto oculi* evidenzia, non sorgendo una contraddizione *(redutio ad absurdum)* garantisce la validità dell'ipotesi di partenza che con ciò risulta dimostrata.

Come noto, sono già state dimostrate parti di interesse, quali le seguenti relazioni tra norme

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \pm 2Re(\varphi(x,y))$$

Si ritiene utile trattare più specificatamente due ulteriori relazioni di possibile interesse quali la seguente

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Im(\varphi(x,y))$$

E' utile ricordare che $Im(z)$ è la parte immaginaria del numero complesso $z = a + ib$. Quindi $Im(a + ib) = b$.

Per quanto già noto, risulta

$$\|x + iy\|^2 = \phi(x + iy) = \varphi(x + iy\,, x + iy) = \varphi(x,x) + \varphi(x,iy) + \varphi(iy,x) + \varphi(x,x) = \varphi(x,x) + \varphi(x,iy) + \overline{\varphi(x,\imath y)} + \varphi(x,x)$$

Occorre studiare $\varphi(x,iy)$ osservando che $\varphi(x,iy) = \bar{\imath}\varphi(x,y)$. Ma i è il numero complesso $(0\,,1)$ pertanto il coniugato di esso è $(0\,,-1)$cioè il numero immaginario $-i$.

Pertanto, si può scrivere che

$$\varphi(x,iy) = \bar{\imath}\varphi(x,y) = -i\varphi(x,y)$$

Occorre ora trattare $\overline{\varphi(x,\imath y)}$. Si può scrivere che $\overline{\varphi(x,\imath y)} = \overline{-\imath\varphi(x,y)} = \overline{-\imath}\ \overline{\varphi(x,y)} = i\overline{\varphi(x,y)}$.

In definitiva risulta che

$$\|x + iy\|^2 = \phi(x + iy) = \varphi(x,x) + \varphi(x,iy) + \overline{\varphi(x,\imath y)} + \varphi(x,x) = \varphi(x,x) + \varphi(x,iy) + i\overline{\varphi(x,y)} + \varphi(iy,iy)$$

Ricordando che $\varphi(ix,ix) = i\bar{\imath}\varphi(y,y) = \varphi(y,y)$ (Infatti, $i\bar{\imath} = i(-i) = (-1)i^2 = (-1)(-1) = +1 * mettere\ in\ nota\ *$) occorre studiare

$$\|x + iy\| = \phi(x + iy) = \varphi(x,x) + \varphi(x,iy) + \overline{\varphi(x,\imath y)} + \varphi(x,x) = \varphi(x,x) - i\varphi(x,y) + \overline{-\imath\varphi(x,y)} + \varphi(y,y)$$

Si assuma per ipotesi sia $\varphi(x,y) = a + ib$. Nel caso più generale $(a\,,b) \neq (0\,,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ciò premesso, occorre studiare il numero $-i\varphi(x,y) + \overline{-\imath\varphi(x,y)}$

Per quanto posto si ha

$-i(a+ib) = (-i)a + (-i)(i)b = (-ia) + (-1)iib = -ia +$
$(-1)(-1)b = b - ia$

Ulteriormente si può scrivere che $\overline{-\imath\varphi(x,y)} = \overline{-\imath(a+\imath b)} = \overline{-\imath a - \imath^2 b} =$
$\overline{-\imath a + b} = b + ia$

Si ha pertanto che

$-i\varphi(x,y) + \overline{-\imath\varphi(x,y)} = b - ia + b + ia = 2b$

Ma per quanto posto risulta che $2b = 2Im(\varphi(x,y))$

Pertanto $\|x+iy\| = \phi(x+iy) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Im(\varphi(x,y))$

In modo del tutto analogo si dimostra che

$\|x-iy\|^2 = \phi(x-iy) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2Im(\varphi(x,y))$

Infatti, che

$\|x-iy\|^2 = \phi(x-iy) = \varphi(x,x) + \varphi(x,-iy) + \varphi(-iy\,,x) +$
$\varphi(-iy\,,-iy) = \varphi(x,x) + \varphi(x,-iy) + \overline{\varphi(x,-\imath y)} + \varphi(-iy\,,-iy)$

Si ha $\varphi(x,-iy) = \overline{-\imath}\ \varphi(x,y) = i\varphi(x,y)$. Posto $\varphi(x,y) = a+ib$ si può scrivere che $\varphi(x,-iy) = \overline{-\imath}\,\varphi(x,y) = i\varphi(x,y) = i(a+ib)$.

Pertanto, si ha

$\overline{\varphi(x,-\imath y)} = \overline{\imath\varphi\ (x,y)} = \overline{\imath(a+\imath b)} = \overline{\imath a - b} = -b - ia$

Ma $\varphi(x,-iy) = -b + ai$

Per quanto ottenuto si può porre

$$\|x - iy\|^2 = \phi(x - iy) = \varphi(x, x) + \varphi(x, -iy) + \varphi(-iy\,, x) +$$
$$\varphi(-iy\,, -iy) = \varphi(x, x) + i\varphi(x, y) + \overline{\imath a - b} + \varphi(-iy\,, -iy)$$

Occorre, ora, studiare $i\varphi(x, y) + \overline{\imath a - b}$ che con semplici passaggi risulta eguale a $-2b$ essendo b la parte immaginaria di $\varphi(x, y)$.

Occorre ora studiare $\varphi(-iy\,, -iy) = -i\overline{-\imath}\,\varphi(y\,, y) = (-1)i\overline{-\imath}\varphi(y\,, y) = (-1)ii\varphi(y\,, y) = (-1)(-1)\varphi(y\,, y) = +1\varphi(y\,, y) = \varphi(y\,, y)$

Quindi si può scrivere che

$$\|x - iy\|^2 = \phi(x - iy) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2Im(\varphi(x, y))$$

I casi di eguaglianza nella relazione di Cauchy – Schwarz – Bunyakovsky

Già dalle righe precedenti si è avuto modo di evidenziare alcuni casi triviali di eguaglianza nel generale contesto della diseguaglianza di C. – S. – B. .

Il caso sicuramente più interessante è quello per il quale si considerano due vettori linearmente dipendenti.

Si tratta di una coimplicazione che quindi deve essere dimostrata nei due sensi.

In termini formali si è soliti scrivere che

$|\varphi(x, y)|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 \Leftrightarrow x, y$ sono linearmente dipendenti

La prima parte della dimostrazione presuppone di dover dimostrare che

x, y sono linearmente dipendenti $\Rightarrow\ |\varphi(x, y)|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$

Affermare che x, y sono linearmente dipendenti equivale a sostenere che si ha $y = \alpha x$ essendo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Il tutto si riduce ad una sostituzione in formula. Si ammetta vera la relazione $|\varphi(x,y)|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$ quando $y = \alpha x$ eseguendo l'opportuna sostituzione in formula.

Si può scrivere che $|\varphi(x,\alpha x)|^2 = \|x\|^2\|\alpha x\|^2$

Si ha che $\varphi(x,\alpha x) = \bar{\alpha}\varphi(x,x)$ da cui $|\varphi(x,\alpha x)|^2 = |\bar{\alpha}\varphi(x,x)|^2$

Operando sul secondo membro $\|x\|^2\|\alpha x\|^2 = |\alpha|^2\|x\|^2\|x\|^2 = \big(\alpha\varphi(x,x)\big)^2$

In definitiva risulta che $|\bar{\alpha}|^2|\varphi(x,x)|^2 = |\alpha|^2\big(\varphi(x,x)\big)^2$

E' di tutta evidenza che $|\varphi(x,x)|^2 = \big(\varphi(x,x)\big)^2$

Occorre ora dimostrare che $|\bar{\alpha}|^2 = |\alpha|^2$=

Sia $\alpha = a + ib$ allora $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$ da cui $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$

Risulta poi $\bar{\alpha} = a - ib$ e quindi $|\bar{\alpha}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ e quindi pure $|\bar{\alpha}|^2 = a^2 + b^2$.

Si evince che $|\alpha|^2 = |\bar{\alpha}|^2$ da cui la tesi.

Occorre ora dimostrare l'implicazione inversa e cioè che

$|\varphi(x,y)|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 \Rightarrow x, y$ sono linearmente dipendenti.

Il caso più generale impone sia $x \neq y \neq 0_E$. Si escludono i casi triviali già considerati per i quali almeno uno dei due vettori sia eguale a 0_E .

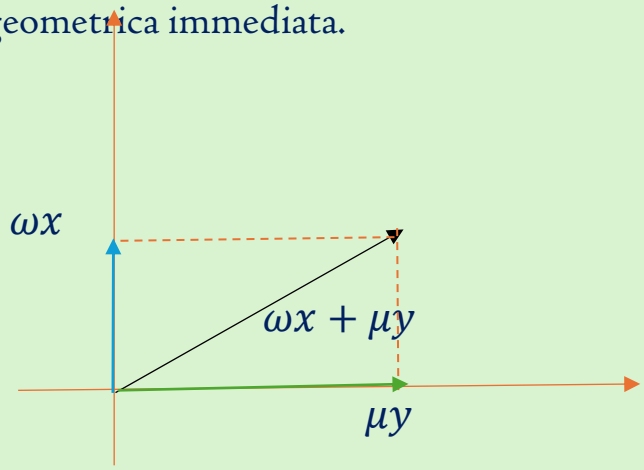
Vi è un ulteriore caso banale per il quale sia $x = y \neq 0_E$. In questo caso si ha che $|\varphi(x,y)|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$ per sostituzione diviene $|\varphi(x,x)|^2 = \|x\|^2\|x\|^2$ da cui si ha banalmente che $|\phi(x)|^2 = \phi(x)\phi(x)$ ed essendo $\phi(x) > 0$ (essendo $x = y \neq 0_E$) si ha $\phi(x)^2 = \phi(x)^2$. Si tratta di un caso particolare di dipendenza lineare quella per il quale $\alpha \equiv 1_{\mathbb{K}}$.

Occorre ora trattare il caso generale evidenziando che $|\varphi(x,y)|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$ impone che tra i vettori $x\ e\ y$ esiste una relazione del tipo $y = \alpha x$.

Più in generale due vettori $x\ e\ y$ sono linearmente dipendenti se esistono due scalari non nulli $(\omega\ , \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ per i quali sia verificata la relazione vettoriale $\omega x + \mu y = 0_V$.

Se tale condizione non è verificata i due vettori non sono linearmente indipendenti.

Si tratta di una generalizzazione rispetto al caso particolare $V = \mathbb{R}^2$ suscettibile di una interpretazione geometrica immediata.



Si osserva che $\omega x + \mu y \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

I vettori $x\ e\ y$ non sono linearmente dipendenti. Affinchè i due vettori siano linearmente dipendenti occorre che $\omega x + \mu y = 0_{\mathbb{R}^2}$. In definitiva deve risultare che $\omega x = -\mu y$ o anche $\mu y = -\omega x$ da cui $y = -\frac{\omega}{\mu}x = \alpha x$ con $\mu \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Nei termini più generali, quindi senza riferimento particolare al caso $V = \mathbb{R}^2$, si può ragionare sulla forma quadratica definita positiva associata al prodotto vettoriale associato allo spazio metrico dato.

Si può scrivere che

$$\phi(\omega x + \mu y) = (\omega x + \mu y, \omega x + \mu y\ ) = (\omega x\ , \omega x) + (\omega x\ , \mu y\ ) + (\mu y, \omega x) + (\mu y, \mu y\ ) = \omega\bar{\omega}(x\ , x) + \omega\bar{\mu}(x\ , y\ ) + \mu\bar{\omega}(y, x) + \mu\bar{\mu}(x\ , y) = |\omega|^2(x\ , x) + \omega\bar{\mu}(x\ , y) + \overline{\mu\bar{\omega}(y, x)} + |\mu|^2(y, y) = |\omega|^2(x\ , x) + 2Re\big(\omega\bar{\mu}(x\ , y\ )\big) + |\mu|^2(y, y)$$

Se si ammette per ipotesi che sia $\phi(\omega x + \mu y) = \phi(0_V)$ condizione per la quale i vettori $x\ e\ y$ sono linearmente dipendenti deve risultare che

$\phi(\omega x + \mu y) = \phi(0_V) = 0$ quindi

$$|\omega|^2(x\ , x) + 2Re\big(\omega\bar{\mu}(x\ , y\ )\big) + |\mu|^2(y, y) = 0$$

Tale relazione è generale nel senso che se si ipotizza che i due vettori $(x, y) \in V \times V$ sono (non sono) linearmente dipendenti la relazione $\omega x + \mu y = 0_V$ $(\omega x + \mu y \neq 0_V)$ deve valore $\forall(\omega, \mu) \in V \times V$.

La precedente relazione può essere scritta ivi introducendovi le norme, ricordando che $\phi(x) = \varphi(x, x) = \|x\|^2$, come segue

$$|\omega|^2\|x\|^2 + 2Re\big(\omega\bar{\mu}(x\ , y\ )\big) + |\mu|^2\|y\|^2 = 0$$

Senza perdita di generalità si può porre $|\omega| = \|y\|^2$ e $\mu = -(x\ ,y\ )$ ottenendo la relazione

$$\|y\|^4\|x\|^2 - 2\|y\|^2((x\ ,y)^2) + (-(x\ ,y\ )^2)\|y\|^2 = 0$$

Dividendo ambo i membri per $\|y\|^2 \neq 0$ in quanto $y \neq 0_V$ si ottiene – avendo posto $\phi(\omega x + \mu y) = 0$ (condizione per la quale i vettori $x\ e\ y$ sono linearmente dipendenti) la diseguaglianza di C. – S. – B. .

La diseguaglianza di Minkowski

Per dimostrare la diseguaglianza di Minkowski si può partire dalla diseguaglianza di C. – S. – B. nella forma $|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$

Per gli sviluppi occorre introdurre, dandone giustificazione, una ulteriore diseguaglianza, quella per la quale $|Re\ \varphi(x,y)|^2 \leq |\varphi(x,y)|^2$ e quindi coordinando il tutto occorre utilizzare il seguente sistema di diseguaglianze

$$|Re\ \varphi(x,y)|^2 \leq |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

Occorre *in primis* dare conto di una nota proprietà dei numeri complessi quella per la quale $|Re(z)\ | \leq |z|$ che vale anche se dette quantità vengono elevate al quadrato.

Sia dato il numero complesso $a + ib$. Come è noto, $|Re(z)\ | = |a|$ in quanto $Re(z) = Re(a + ib) = a$. Come già ricordato $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Elevando ambo i membri al quadrato si ha una relazione vera con tutta evidenza. Infatti

$|a|^2 \leq a^2 + b^2$ o anche $a^2 \leq a^2 + b^2$. Se $b \neq 0$ si ha la relazione stretta $a^2 < a^2 + b^2$. Se $b = 0$ allora si ha $a^2 = a^2$, ovvia.

Se $\varphi(x,y) = a + ib$ con $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a,b) \neq (a,0) : a \neq 0$, cioè se $\varphi(x,y)$ è un numero complesso con seconda componente non nulla, risulta vera la relazione $|Re(z)| < |z|$. Se, per contro si hanno coppie del tipo $(a,b) : b = 0$ allora è di tutta evidenza vera la relazione $|Re(z)| = |z|$. Infatti, in questo caso si ha $|Re(z)| = |z| \xrightarrow{(a,0)} |Re(a,0)| = \sqrt{a^2} = |a| = |Re(a,0)|$.

Queste argomentazioni giustificano la prima delle due diseguaglianze considerate $|Re\ \varphi(x,y)|^2 \leq |\varphi(x,y)|^2$.

Si può immediatamente sostenere che $|Re\ \varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$

Ma se $Re\ \varphi(x,y) < 0$ essendo $\varphi(x,x)\varphi(y,y) > 0$ in quanto si tratta di due forme definite positive. Pertanto risulta

$Re\ \varphi(x,y)_{|\varphi(x,y)<0} < \varphi(x,x)\varphi(y,y)$ (primo caso di interesse)

Sotto questa condizione, *a fortiori*, risulta che

$Re\ \varphi(x,y)_{|\varphi(x,y)<0} < \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ (primo caso utilizzabile per gli sviluppi).

(Un numero negativo è minore di un numero non negativo !)

In precedenza si è rilevata utile una osservazione evidente. Infatti, se tra tre numeri reali non negativi $a, b\ e\ c$ sussiste una relazione del tipo $a \leq b \leq c$ si può sostenere che $(a \leq b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$.

Ulteriormente se $Re\ \varphi(x,y) > 0$ vale comunque la relazione $|Re\ \varphi(x,y)|^2 \leq \phi(x)\phi(y)$. Da essa si ha (trattandosi di quantità positive) che $|Re\ \varphi(x,y| \leq \sqrt{\phi(x)\phi(y)}$.

Ma, trattandosi del caso $Re\ \varphi(x,y) > 0$ è lecito scrivere $|Re\ \varphi(x,y| = Re\ \varphi(x,y)$. Ciò posto si può scrivere che $Re\ \varphi(x,y) \leq \sqrt{\phi(x)\phi(y)}$

Assegnato uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare (spazio prehilbertiano), quindi data la coppia (E,φ), vale la seguente *diseguaglianza*, detta *di Minkowski*

$$\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \quad \forall (x,y) \in E \times E$$

Si tratta, con tutta evidenza, di grandezze positive (e reali).

Si ammetta vera detta relazione tra le forme definite positive e si elevino al quadrato ambo i membri. Si ottiene la seguente relazione:

$\phi(x+y) \leq \left(\sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}\right)^2$ *da cui si ottiene*

$$\phi(x+y) \leq \phi(x) + 2\sqrt{\phi(x)\phi(y)} + \phi(y)$$

Sviluppando il primo membro si ha

$$\phi(x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \phi(x) \leq \phi(x) + 2\sqrt{\phi(x)\phi(y)} + \phi(y)$$

$$\varphi(x,y) + \overline{\varphi(x,y)} \leq 2\sqrt{\phi(x)\phi(y)}$$

$2\left(Re\ \varphi(x,y)\right) \leq 2\sqrt{\phi(x)\phi(y)}$ *da cui* $\left(Re\ \varphi(x,y)\right) \leq \sqrt{\phi(x)\phi(y)}$

L'aver posto $\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \quad \forall (x,y) \in E \times E$ *vera per ipotesi detta relazione conduce al una relazione vera quale* $\left(Re\ \varphi(x,y)\right) \leq \sqrt{\phi(x)\phi(y)}$ *quando si considerano i casi* $Re\ \varphi(x,y)\ _{|Re(\varphi(x,y))<0} < \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ *e* $Re\ \varphi(x,y) \leq \sqrt{\phi(x)\phi(y)}$ quando $Re\ \varphi(x,y) > 0$.

Si è soliti affermare che la relazione di Minkowski è una generalizzazione della nota diseguaglianza triangolare.

Occorre ora considerare il caso particolare della eguaglianza nel contesto generale della diseguaglianza di Minkowski.

La condizione di eguaglianza si ha, innanzi tutto, in casi triviali quali quelli riconducibili alla condizione che almeno uno dei due elementi dello spazio vettoriale che si considerano siano nulli. Se $x = y = 0_E$ la diseguaglianza, per sostituzione in formula, diviene

$$\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \xrightarrow[y=0_E]{x=0_E} \sqrt{\phi(0_E+0_E)} \leq \sqrt{\phi(0_E)} + \sqrt{\phi(0_E)} \Rightarrow 0 = 0$$ *in quanto* $\phi(0_E) = 0$.

Si consideri il caso in cui sia $x = 0_E$ *e* $y \neq 0_E$. *Sotto queste condizioni risulta essere vero che*

$$\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \xrightarrow[y\neq 0_E]{x=0_E} \sqrt{\phi(0_E+y)} \leq \sqrt{\phi(0_E)} + \sqrt{\phi(y)} \Rightarrow \sqrt{\phi(y)} \leq 0 + \sqrt{\phi(y)} \Rightarrow \sqrt{\phi(y)} \leq \sqrt{\phi(y)}$$ *o meglio* $\sqrt{\phi(y)} = \sqrt{\phi(y)} \neq 0$ *in quanto* $y \neq 0_E$.

Ad esito simile (in termini di eguaglianza tra i due membri) si perviene quando risulta $\begin{cases} x \neq 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$.

Il secondo caso di eguaglianza si ha quando i vettori x *e* y *sono linearmente dipendenti sotto l'ulteriore condizione che sia* $x = \alpha y$ *con* $\alpha > 0$.

In questo caso risulta vero che $\sqrt{\phi(x+y)} = \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$. Si tratta di dimostrare una condizione necessaria e sufficiente e quindi di dimostrare separatamente che

sia $x = \alpha y$ *con* $\alpha > 0 \Rightarrow \sqrt{\phi(x+y)} = \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$ *e*

$$\sqrt{\phi(x+y)} = \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \Rightarrow sia\ x = \alpha y\ con\ \alpha > 0.$$

Si può partire dalla prima implicazione utilizzando l'opportuna sostituzione in formula nella diseguaglianza di M. ponendo quindi $\sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$

$$\xrightarrow[\alpha>0]{y=\alpha x} \sqrt{\phi(x+\alpha x)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(\alpha x)}.$$

Si osserva che i due membri definiscono una diseguaglianza tra numeri reali non negativi. Quindi è possibile elevare al quadrato ed ottenere

$$\phi(x+\alpha x) \leq \left(\sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(\alpha x)}\right)^2$$

$$\phi(x+\alpha x) \leq \phi(x) + \phi(\alpha y) + 2\sqrt{\phi(x)\phi(\alpha x)}$$

Detta relazione può essere riscritta ponendo

$$\varphi(x+\alpha x, x+\alpha x) \leq \varphi(x, x) + \varphi(\alpha x, \alpha x) + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x, \alpha x)}$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$\varphi(x, x) + \varphi(x, \alpha x) + \varphi(\alpha x, x) + \varphi(\alpha x, \alpha x) \leq \varphi(x, x) + \varphi(\alpha x, \alpha x) + 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x, \alpha x)}$$

Quindi

$$\varphi(x\,,\alpha x)+\varphi(\alpha x\,,x)\leq 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x,\alpha x)}$$

Si può pertanto scrivere che

$$\bar{\alpha}\varphi(x\,,x)+\alpha\varphi(x\,,x)\leq 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x,\alpha x)}$$

$$\varphi(x\,,x)(\bar{\alpha}+\alpha)\ \leq 2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x,\alpha x)}$$

Se $\alpha>0$ *deve assolutamente intendersi* $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ *e pertanto si deve ammettere – al di là del formalismo tipicamente riferito ai numeri complessi, elementi di* $\mathbb{C}$*, –* *risulta essere immediato porre* $\bar{\alpha}+\alpha=2\alpha$*.*

Risulta immediato comprendere che $\varphi(x\,,x)(\bar{\alpha}+\alpha)=2\alpha\varphi(x\,,x)>0$ *essendo* $\varphi(x\,,x)>0\ \forall x\ \neq 0_V$*.*

Risulta – dopo che si sono divisi per 2 ambo i membri – vera la seguente relazione

$$\alpha\varphi(x\,,x)\leq\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(\alpha x,\alpha x)}$$

Senza perdita di equivalenza – trattandosi di tutte grandezze positive – si può scrivere

$$\alpha^2\varphi(x\,,x)^2\leq\ \varphi(x,x)\varphi(\alpha x,\alpha x)$$

Dividendo ambo i membri per $\varphi(x,x)>0$ *si ottiene*

$\alpha^2\varphi(x\,,x)\leq\varphi(\alpha x,\alpha x)$ *da cui*

$$\alpha^2\varphi(x\,,x)\leq\alpha\bar{\alpha}\,\varphi(x\,,x)$$

Ma in $\mathbb{R}$ *si ha* $\alpha=\bar{\alpha}$ *e pertanto* $\alpha\bar{\alpha}=\alpha^2$

In definitiva si avrebbe $\alpha^2\varphi(x\,,x)=\alpha^2\,\varphi(x\,,x)$

L'avere notizia che deve essere $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *ha sicuramente semplificato l'approccio dimostrativo.* A contrariis *si dovrebbe giungere ad evidenziare che il caso sia* $\alpha \in \mathbb{R}^-$ *(vettori paralleli ma con versi opposti se ci si riferisce ai casi geometrici* $\mathbb{R}^2$ *o* $\mathbb{R}^3$*) non conduce al caso di eguaglianza.*

Poiché si è ottenuta una identità vera si può scrivere che

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \\ \forall (x\,,y) \in V \times V \;:\; (x\,,y) \neq (0_V, 0_V) \\ y = \alpha x \\ \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right) \Rightarrow \sqrt{\phi(x+y)} = \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$$

Si è avuto modo di evidenziare che, assegnato uno spazio prehilbertiano munito di prodotto scalare, quindi data la coppia (E, φ)*, la forma quadratica* ϕ *associata al prodotto scalare consente di definire una applicazione che associa ad elementi di E un numero reale non negativo secondo lo schema*

$$\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}_0^+ \quad \textit{tale che } x \overset{\|\,.\,\|}{\longrightarrow} \sqrt{\phi(x)}$$

$\|\,.\,\|$ *è la norma euclidea associata al prodotto scalare* $\varphi(.\,,.)$.

Negli spazi prehilbertiani vale la seguente relazione di immediata interpretazione

$$d(x\,,y) = \|x - y\| = \sqrt{\phi(x-y)}$$

In questo contesto risulta valida la regola del parallelogramma che può essere scritta ponendo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \;\; \forall (x\,,y) \in E \times E$$

La vigenza della regola del parallelogramma non è vera in generale ma dipende dalla metrica che si istituisce.

C'è, ad esempio, da chiedersi se detta identità sia verificata dalla metrica $\| \, . \, \|_1 = \sum|x_i|$.

Al riguardo si hanno i seguenti passaggi formali

$$\| x + y\|_1 = \sum|x_i + y_i|$$

$$\| x + y\|_1 = \sum|x_i - y_i|$$

Occorre verificare se

$$(\| x + y\|_1)^2 + (\| x - y\|_1)^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

o, equivalentemente, se

$$(\sum|x_i + y_i|)^2 + (\sum|x_i - y_i|)^2 = 2((\sum|x_i|)^2 + (\sum|y_i|)^2)$$

Sviluppando opportunamente il primo membro si ottiene

$$(\sum|x_i|)^2 + (\sum|y_i|)^2 + 2(\sum|x_i|)(\sum|x_i|) + (\sum|x_i|)^2 + (\sum|y_i|)^2 - 2(\sum|x_i|)(\sum|x_i|) = 2((\sum|x_i|)^2 + (\sum|y_i|)^2)$$

e in definitiva $2((\sum|x_i|)^2 + (\sum|y_i|)^2) = 2((\sum|x_i|)^2 + (\sum|y_i|)^2)$

Poiché si è ottenuta una identità palesemente vera la metrica considerata nell'assegnato spazio vettoriale prehilbertiano verifica la proprietà del parallelogramma. Detta norma è associabile al prodotto scalare.

Si consideri un ulteriore esempio. Si consideri la norma $\| \, . \, \|_\infty = Max| \, . \, |$.

Si ammetta $E = \mathbb{R}^2$. Siano dati i punti $\begin{cases} x = (a, 0) \\ y = (0\,, b) \end{cases}$ con $a \neq b \neq 0$.

Per le posizioni fatte risulta che $\| x\|_\infty = Max\ (|a|, |0|) = |a|$ e $\| y\|_\infty = Max\ (|b|, |0|) = |b|$. Risulta altresì che $\| x + y\|_\infty = Max(|a|\ , |b|)$ ed anche $\| x - y\|_\infty = Max(|a|\ , |b|)$.

Occorre verificare se è verificata la relazione del parallelogramma per la quale con riferimento al caso di specie

$2\big(Max(|a|\ , |b|)\big)^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ e quindi $\big(Max(|a|\ , |b|)\big)^2 = (|a|^2 + |b|^2)$. Senza perdita di generalità si può porre $Max(|a|\ , |b|) = |b|$ si avrebbe vero che $|b|^2 = |a|^2 + |b|^2$.

Tale eguaglianza non è in generale vera. In particolare, non lo è $\forall\ b\ \in \mathbb{R}$ quando $a\ \in \mathbb{R} - \{0\}$. Il caso $b = 0$ è banale.

Considerato che è stata ottenuta una identità palesemente non vera in generale, la metrica considerata nell'assegnato spazio vettoriale prehilbertiano non verifica la proprietà del parallelogramma. Detta norma non è quindi associabile al prodotto scalare.

Occorre, da ultimo, ricordare la *continuità della funzione prodotto scalare*.

Dato $(E\ , \varphi)$ l'applicazione $E \times E\ \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni coppia $(x\ , y) \in E \times E$ il numero reale $\varphi(x\ , y)$ è una applicazione continua.

Data la coppia $(x\ , y)\ ) \in E \times E$ (quindi per ogni coppia di $E \times E$) è data una coppia $(h\ , k) \in E \times E$ per la quale si ammette $(h\ , k) \to (0\ , 0)$.

$|\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y)| = |\varphi(x, y) + \varphi(x, k) + \varphi(h, y) + \varphi(h, k) - \varphi(x, y)| = |\varphi(x, k) + \varphi(h, y) + \varphi(h, k)| \leq |\varphi(x, k)| + |\varphi(h, y)| + |\varphi(h, k)| \leq \|x\|\|k\| + \|h\|\|y\| + \|h\|\|k\|$

Risulta $\lim_{\substack{\|k\|\to 0^+ \\ \|h\|\to 0^+}} \|x\|\|k\| + \|h\|\|y\| + \|h\|\|k\| = 0$

(Il risultato è immediato in quanto si tratta della somma di tre numeri reali che tendono tutti a zero).

Ortogonalità

La nozione di ortogonalità tra elementi di uno spazio vettoriale metrico è già stata introdotta con riferimento al valore della funzione prodotto scalare. Per come è impostata la teoria è possibile introdurre la funzione $\cos(x, y)$ tra elementi di uno spazio vettoriale metrico V.

Dato (V, φ) ad ogni coppia $(x, y) \in V \times V$ è associabile, tramite la funzione φ – detta prodotto scalare – un numero reale $\cos(x, y)$ tale che $|\cos(x, y)| \leq 1$ o, equivalentemente, $-1 \leq \cos(x, y) \leq 1$.

Detta funzione $(x, y) \xrightarrow{\cos(.)} \frac{\varphi(x,y)}{\|x\|\|y\|}$

Sinteticamente la funzione considerata è indicata scrivendo

$$\cos(x, y) = \frac{\varphi(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$

E' immediata conseguenza della diseguaglianza di C. – S. – B. che risulta

$\left|\frac{\varphi(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right| \leq 1$ o, equivalentemente, $-1 \leq \frac{\varphi(x,y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1$.

La condizione, nota anche a livello elementare, per la quale due vettori sono paralleli (in senso concorde o discorde, rispettivamente) è che sia

$\frac{\varphi(x,y)}{\|x\|\|y\|} = \pm 1$

La condizione $\frac{\varphi(x,y)}{\|x\|\|y\|} = 0$ cioè quella per la quale sia $\varphi(x,y) = 0$ è detta di ortogonalità (o di perpendicolarità) tra i vettori non nulli considerati. Si osservi che la definizione non è operativa se almeno uno dei due vettori è eguale a 0_V .

In definitiva

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi(x,y)}{\|x\|\|y\|} = 0 \\ x \neq 0_V \\ \wedge \\ y \neq 0_V \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi(x,y) = 0 \\ e \\ \overline{\varphi(y,x)} = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \perp y \\ \Updownarrow \\ y \perp x \end{pmatrix}$$

Queste argomentazioni consentono di ricordare la già utilizzata nozione di vettori ortogonali.

Dato uno spazio vettoriale V munito di un prodotto scalare φ due elementi di V si dicono ortogonali se $\varphi(x,y) = 0$. In simmetria reale è nota la commutatività del prodotto scalare rispetto ai termini. Infatti, in questo caso si ha che $\varphi(x,y) = \varphi(y\,,x)$. Con riferimento a $\mathbb{C}$ vale la simmetria hermitiana per la quale $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y\,,x)}$. Neppure in questo caso, rispetto all'ortogonalità sorgono problemi in quanto in $\mathbb{C}$ si ha *icto oculi* $0_{\mathbb{C}} = \overline{0_{\mathbb{C}}}$.

Con riferimento a $\mathbb{R}$ si ha $\varphi(x,y) = \varphi(y\,,x) = 0$. Infatti $\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(y\,,x) = 0$.

Come già ricordato, la condizione sussiste anche con riferimento alla simmetria hermitiana per la quale $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y\,,x)}$. Si ammetta $\varphi(x,y) = (0\,,0)$. Allora si ha $\overline{\varphi(y\,,x)}\,_{|\varphi(x,y)=(0\,,0)} = \varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(x,y) = 0$.

Viceversa, si ammetta sia $\varphi(y\,,x) \neq (0\,,0) = 0_{\mathbb{C}}$. Sia per ipotesi che $\varphi(y,x) = a + ib\ :\ (a\,,b) \neq (0\,,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Per le ipotesi fatte, supposta valida la simmetria hermitiana, sarebbero veri i seguenti passaggi

$$\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y\,,x)}$$

$$0_{\mathbb{C}} = \overline{\varphi(y\,,x)}_{|\varphi(y,x)\neq 0_{\mathbb{C}}}$$

Ma se $\varphi(y,x) \neq 0_{\mathbb{C}}$ allora anche $\overline{\varphi(y\,,x)}_{|\varphi(y,x)\neq 0_{\mathbb{C}}} \neq 0_{\mathbb{C}}$

Pertanto sarebbe vera l'identità palesemente assurda

$$0_{\mathbb{C}} = \overline{(a,b)} \neq 0_{\mathbb{C}}$$

Se non valesse la simmetria hermitiana si avrebbe una relazione palesemente non vera.

Evidenziato che la condizione per la quale due vettori sono ortogonali è che sia $\varphi(x,y) = 0$ si è denotata con $x \perp y$ (equivalentemente $y \perp x$) la condizione di perpendicolarità.

Sovente è utile – assegnato uno spazio $(V\,,\varphi)$ – considerare due insiemi, inclusi propriamente in V, denotati con U e W per i quali se $u\ e\ v$ sono due distinti elementi di essi per i quali risulti che

$\forall(\,u\,,w) \in U \times W$ risulti vero che $\varphi(u\,,w) = 0$ cioè sia $u \perp w$.

Ciò deve evidentemente valere al variare di $u \in U$ per ogni $w_i \in W$ e viceversa al variare di $w \in W$ per ogni $u_i \in U$.

Discorsivamente si può affermare che ogni vettore di U deve essere ortogonale ad ogni vettore di W.

Verificatasi questa condizione si può scrivere che $U \perp W$ (e simmetricamente $W \perp U$).

Detti insiemi sono indicabili anche utilizzando la notazione insiemistica con formalismi del tipo $\{u_i\}$ e $\{u_j\}$. Si tratta comunque di sottoinsiemi di V.

Con abuso di notazione sono utilizzate notazioni quali $u_i \perp W$ ad indicare che il vettore $u_i \in \{u_j\}$ è ortogonale ad ogni vettore di W.

Dato lo spazio vettoriale metrico (E, φ) e dato un insieme A $\subset E$ è chiamato l'ortogonale di A l'insieme $A^{\perp}$ definito come segue

$$A^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in A : \varphi(x, a) = 0\}$$

In termini sintetici dato (E, φ) si considera un insieme A $\subset E$. In termini astratti per ogni elemento dell'insieme A si individuano tutti gli elementi di E per i quali $\varphi(x, a) = 0$. Detto insieme è denotato con $A^{\perp}$.

Si dimostra che l'ortogonale $A^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di E.

Siano $x \; e \; x'$ due elementi di $A^{\perp}$. Comunque si prenda un $a \in A$ poiché si è posto che detti elementi sono elementi di $A^{\perp}$ è vero che per essi

$$\begin{cases} \varphi(x, a) = 0 \\ \varphi(x', a) = 0 \\ \forall a \in A \\ x \neq x' \end{cases}$$

Occorre dimostrare che $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ risulta vera la relazione

$\varphi(\alpha x + \beta x', a) = 0$ o in forma equivalente

$$\overline{\varphi(a, \alpha x + \beta x')} = 0$$

Si può lavorare sul prodotto interno $\varphi(a, \alpha x + \beta x') = \varphi(a, \alpha x) + \varphi(a, \beta x') = \bar{\alpha}\, \varphi(a, x) + \bar{\beta}\varphi(a, x') = \bar{\alpha} \cdot 0 + \bar{\beta} \cdot 0 = 0$

Ne consegue che il vettore $\alpha x + \beta x'$ è elemento di $A^{\perp}$. Dal che discende la struttura di spazio vettoriale dell'ortogonale $A^{\perp}$ di A $\subset E$. Si dovrà dimostrare successivamente che si tratta di un chiuso.

Evidentemente $\alpha = \beta = 0_{\mathbb{K}}$ evidenzia che $0_E \in A^{\perp}$.

Negli sviluppi è utile ricordare la nozione di insieme delle parti di un dato insieme non vuoto. Trattasi dell'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi propri, ivi compreso l'insieme vuoto, $\emptyset$, e improprio di E.

Prima di sviluppare le ulteriori proprietà dell'ortogonale è utile dare due ulteriori definizioni preliminari.

Un insieme di elementi di E è detto ortogonale se comunque si prendano due elementi distinti di esso tra di essi vale la relazione di ortogonalità che, in generale, non è una relazione di equivalenza.

Tale insieme è formalizzato come segue $\{x \perp y : (x, y) \in E \times E\}$. In modo discorsivo, in detto insieme ogni elemento è ortogonale ad ogni altro elemento di E. Altrimenti detta, ogni coppia di elementi $(x\ , y) \in \{x \perp y : (x, y) \in E \times E\}$ è tale che $x \perp y$ comunque sotto la condizione $(x, y) \in E \times E$. Gli elementi di $\{x \perp y : (x, y) \in E \times E\}$ sono tali che $\varphi(x, y) = 0$.

Se oltre la condizione data si aggiunge l'ulteriore per la quale le norme dei vettori sono identicamente eguali a I allora si ha una classe (o insieme o famiglia) ortonormale.

Formalmente, detto insieme viene scritto ponendo $\{x \perp y : (x,y) \in E \times E \wedge \|x\| = \|y\| = 1\}$. Ciò è inteso $\forall (x,y) \in E \times E$.

Sono di interesse alcune proprietà dell'ortogonale.

Siano A e B due insiemi elementi dell'insieme delle parti di E, esclusi i casi particolari dell'insieme vuoto e di E stesso, che pure è elemento dell'insieme delle parti. Sia $A \neq B$ e più propriamente si ponga $A \subset B$.

Vale la seguente implicazione $A \subset B \Rightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp}$.

Sia dato un x' tale che $x' \in B^{\perp}$. Detto elemento sarà ortogonale ad ogni elemento di B ed anche ad ogni elemento di A ⊂ B. Pertanto $x' \in A^{\perp}$.

Il punto critico di questa osservazione – ampiamente utilizzata dalla manualistica – anche alla luce dell'interpretazione dell'implicazione, univocamente accolta dalla teoria pare delicata in relazione alla definizione stessa di ortogonale – in quanto l'ammettere $x' \in B^{\perp}$ ed anche $x' \in A^{\perp}$ sembra -ma lo è solo *prima facie* – in contraddizione con la definizione formale di ortogonale di A, denotato con $A^{\perp}$.

Infatti, si ha per definizione di ortogonale di un insieme (spazio vettoriale) A che l'ortogonale è formalizzato come $A^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in A : \varphi(x,a) = 0\}$. Pertanto, logicamente detto $b \in B : b \notin A$ è già uno degli $x \in E$ tali che si tratto di un elemento di $A^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in A : \varphi(x,a) = 0\}$.

Si ammetta, *a contrariis*, $b \in B : b \notin A$ non sia uno degli $x \in E$ tali che si tratto di un elemento di $A^{\perp}$. Tale ipotesi travolge la definizione stessa di $A^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in A : \varphi(x,a) = 0\}$ in quanto non sarebbero stati – qualora si dovesse operare in concreto, e sempre qualora esistesse un procedimento – con

riferimento al caso *de quo* – che consenta di stabilire, volta per volta, quali elementi appartengono o meno ad un dato insieme, – individuati gli elementi appartenenti all'ortogonale, secondo un ragionamento astratto ma altrettanto astrattamente idoneo a individuare gli elementi dell'insieme.

Dato uno spazio vettoriale E ed un sottoinsieme proprio di E – quindi considerato un elemento dell'insieme delle parti di E – indicato con A risulta che $\forall A \in \wp(E)$, ove $\wp(E)$ denota l'insieme i cui elementi sono tutti i soli i sottoinsiemi, propri e non, di E, che, come è noto, ha struttura di spazio vettoriale.

Si deve evidenziare che $\forall A \in \wp(E)$ si ha $A^{\perp} \supset (SpanA)^{\perp}$ ove $SpanA$ è lo spazio vettoriale i cui elementi sono tutte e sole le combinazioni lineari dei vettori elementi di A, assegnato che sia A.

Si parte da una evidenza. $A \subset Span\ (A)$. Si può fare un esempio banale per rendersene conto. Sia $A = \{0_E, x, y, z\}$. Sia dato il campo $\mathbb{K}$ degli scalari. Lo $Span(A)$ può essere formalizzato come segue:

Span(A)$= \{\alpha x + \beta y + \gamma z \ : x, y, z \in E, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}\}$. E' di tutta evidenza che si tratta di un sottospazio vettoriale di E, detto generato da A.

Banalmente, ci si può riferire agli esiti precedenti ponendo vera la seguente implicazione logica

$$A \subset Span\ (A) \Rightarrow A^{\perp} \supset (SpanA)^{\perp}$$

Sempre posto $\forall A \in \wp(E)$ occorre considerare $A^{\perp\perp}$ inteso come $(A^{\perp})^{\perp}$, quindi come l'ortogonale dell'ortogonale. Risulta $A^{\perp\perp} = A$. Si consideri un $a \in A$ allora tutti gli $x \in E$ tali che $\varphi(x, a) = 0$ sono elementi di $A^{\perp}$.

La simmetria hermitiana giustifica la proprietà. Infatti, $\varphi(x,a)=0 \Leftrightarrow \overline{\varphi(a\,,x)}=0$. Quindi $a \in A^{\perp\perp}$. Ciò vale $\forall\, a \in A$. Più specificatamente $A^{\perp\perp}$ è definito a partire da $A^{\perp}-$ formalmente costituito da tutti e solo gli $x \in E$ ortogonali ad ogni elemento di A, tali cioè che $\varphi(x,a)=0$.

Come si scriveva $A^{\perp\perp}$ è definito a partire da $A^{\perp}-$ che contiene elementi di E, non necessariamente appartenenti ad A. Pertanto a partire da una famiglia di vettori $x \in E$ i vettori che garantiscono l'ortogonalità sono tutti e solo quelli che sono altresì elementi di A.

Con riferimento ad un $\mathbb{K}-$ spazio vettoriale la spiegazione è evidente ed assolutamente intuitiva. Infatti dire $u \perp v$ equivale a dire $v \perp u$. Occorre però rimarcare che il passaggio da $A^{\perp}a\ A^{\perp\perp}=A$ sconta il fatto che $A^{\perp}$ contiene in generale elementi x di E mentre $A^{\perp\perp}=A$ contiene elementi di A, coerentemente con la eguaglianza insiemistica ad A. Il tutto è sintetizzabile, seppure forse con una descrizione impropria, come segue

$A \xrightarrow{(.)^{\perp}} A^{\perp} \xrightarrow{(.)^{\perp}} A$ tale che $A^{\perp}$ è costituito dagli x di E per i quali, comunque si prenda un $a \in A$ vige l'ortogonalità. Simmetricamente ottenuti gli x rilevanti – cioè quelli che garantiscono la condizione di ortogonalità con ogni a, elemento di A, la stessa condizione di ortogonalità, rispetto agli x sarà offerta solo dagli stessi $a \in A,$ stante la evidente, ovvia, complicazione

$u \perp v \Leftrightarrow v \perp u.$

Valgono ulteriori due proprietà, in ragione delle quali risulta

$E^{\perp}=\{0_E\}$ ed anche $\{0_E\}^{\perp}=E.$

Dato E – spazio vettoriale di riferimento – definire $E^{\perp}$ equivale a definire l'insieme i cui elementi devono comunque essere elementi di E per i quali sia – comunque si prende un $e \in E$ tali che esista un vettore $e' \neq e = e_j \; \forall j \; \in \mathbb{N}$ per il quale sia identicamente verificata la condizione di prodotto interno compatibile con la condizione di ortogonalità.

Ciò posto deve risultare che $\varphi(e', e_j) = 0 \, \forall e_j \in E$. Si deve evidenziare che detta relazione al variare di $e_j \in E$ deve valere se e solo se $e' = 0_E$. E' aspetto, anche questo, alquanto intuitivo. Infatti, comunque si prenda $e_j \in E \; : \; e_j \neq 0_E$ allora se $e' = 0_E$ risulta vero che

$$(e' = 0_E) \Rightarrow \varphi(e', e_j) = 0 \;\; \forall e_j \in E$$

Si può ricordare che la relazione di ortogonalità non è una relazione di equivalenza nel senso che $\binom{a \perp b}{c \perp b} \nRightarrow a \perp c$.

E' triviale il caso $e' = e_j = 0_E$. Il caso generale $\varphi(e', \, e_j) = 0$ sotto le condizione $e' \neq 0_E$ valido quando (*recte:* per ogni) $e_j \in E - \{0_E\}$ è improponibile anche a livello intuitivo in quanto incidente sulla natura stessa degli elementi costitutivi di E. In definitiva, si avrebbe la bizzaria di ritenere che esiste un vettore non nullo ortogonale ad ognuno (a tutti) dei vettori non nulli di E.

Quindi l'unico vettore ortogonale ad ogni altro elemento non nullo di E è il vettore nullo. Simmetricamente deve aversi $\{0_E\}^{\perp} = E$.

In questo caso si parte da un sottospazio degenere costituto da un solo elemento cioè 0_E. Quindi si parte dall' insieme $\{0_E\}$. Determinare l'insieme $\{0_E\}^{\perp}$ equivale ad individuare gli elementi di E – non necessariamente appartenenti all'insieme

$\{0_E\}$ – per i quali sia garantita la condizione di ortogonalità definita dalla relazione $\varphi(0_E, e_j) = 0 \ \forall \ e_j \in E$.

E' già noto che $\varphi(0_E, e_j) = \overline{\varphi(e_j\ , 0_E)} = 0$.

Quindi, come deve essere, risulta che $\{0_E\}^{\perp} = E$ cioè $0_E \perp e_j$ e simmetricamente $e_j \perp 0_E$ $(0_E \perp e_j \Leftrightarrow e_j \perp 0_E)$.

E' di interesse una ulteriore proprietà per la quale $\forall\ A \in \wp(E)$ si ha $A \cap A^{\perp} \subset \{0_E\}$. Tra gli $A \in \wp(E)$ vi è l'insieme vuoto, denotato con $\emptyset$, cioè l'insieme privo di elementi. Lo spazio vettoriale E può assurgere ad insieme universo e pertanto sotto questa convenzione l'insieme vuoto, privo di elementi, può essere formalizzato scrivendo $\emptyset = \{x \in E : x \notin E\}$.

La proprietà per la quale $\forall\ A \in \wp(E)$ si ha $A \cap A^{\perp} \subset \{0_E\}$ non pare operativa nel caso di ponga $A = \emptyset$. In effetti, $\emptyset \in \wp(E)$ ed occorre definire – dato $\emptyset$ – l'ortogonale di $\emptyset$ denotato con $\emptyset^{\perp}$. In questo caso non può essere istituita una relazione di ortogonalità in quanto si dovrebbe affermare che esiste detta relazione quando manca uno dei termini della relazione.

Ulteriore caso limite è quello per il quale si consideri $A = E$ in quanto E $\in \wp(E)$. In questo caso deve porsi $E \cap E^{\perp} \subset \{0_E\}$. E è un insieme dato, avente struttura di spazio vettoriale. Occorre definire $E^{\perp}$ dato E.

Per la definizione di ortogonale si può scrivere che $\mathrm{E}^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in E : \varphi(x, a) = 0\}$. L'unico elemento di E che è ortogonale a ciascun elemento di E è – per quanto già visto – l'elemento $x = 0_E$. Pertanto dato E l'ortogonale di E è l'insieme $\mathrm{E}^{\perp} = \{0_E\}$. Applicando l'operazione di intersezione insiemistica si

evince che l'unico elemento in comune tra i due insiemi è 0_E, unico elemento appartenente ad entrambi gli insiemi dato E e ottenuto $\mathrm{E}^{\perp}$.

Fuori da queste ipotesi polari si ha il caso sia $\begin{cases} A \in \wp(E) \\ A \neq \emptyset \\ A \neq E \end{cases}$.

Al riguardo può essere fatto notare che gli elementi dell'insieme $A \cap A^{\perp}$ *, di cui deve essere definita la eventuale esistenza, devono comunque essere elementi appartenenti ad entrambi gli insiemi. In definitiva deve valere la seguente implicazione logica* $(x \in A \cap A^{\perp}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \in A \\ x \in A^{\perp} \end{pmatrix}$. *La logica dimostrativa è la medesima. Si ammette dato A e dato detto insieme A tale che* $\emptyset \subset A \subset E$ *. Ciò posto si individua* $\mathrm{E}^{\perp} = \{x \in E : \forall a \in A : \varphi(x,a) = 0\}$. *Anche in questo caso, e non poteva essere altrimenti, l'unico elemento* $x \in E : \forall a \in A : \varphi(x,a) = 0$ *è* $x = 0_E$ *.*

Da ciò discende immediatamente la tesi.

Siano assegnati due distinti sottospazi vettoriali di E indicati come F e G.

Valgono le seguenti due proprietà

$$(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

$$(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$$

Occorre partire dalla notazione $F + G$ *. La spiegazione del formalismo è un poco laboriosa ma non difficile. Dati i due sottospazi vettoriali F e G occorre considerare l'insieme i cui elementi sono gli elementi di F e di G, la cosiddetta unione insiemistica, denotata ordinariamente con il formalismo* $F \cup G$*. Detto insieme contiene l'elemento nullo, comune ad entrambi gli insiemi che sono, per ipotesi, due sottospazi vettoriali. L'insieme* $F \cup G$ *non ha in generale struttura di*

spazio vettoriale. Se $x \in F$ *e* $x \in G$ *allora banalmente è vero che* $x \in F \cup G$. *Formalmente* $(x \in F, x \in G) \Rightarrow (x \in F \cup G)$. *Evidentemente è possibile l'esistenza di elementi* $x' \in F : x' \notin G$ *e viceversa elementi* $x'' \in G : x'' \notin F$. *In ogni caso gli elementi* x' *e* x'', *come specificati nel senso della loro appartenenza/non appartenenza ad un insieme, sono elementi di* $F \cup G$. *Queste generano esiti falsi. L'assunzione che* $F \cup G$ *sia uno spazio vettoriale presuppone che nei casi degli elementi* x' *e* x'', *come specificati nel senso della loro appartenenza/non appartenenza ad un insieme, sia verificata la condizione che una loro combinazione lineare sia elemento di* $F \cup G$. *Dovrebbe risultare vero che anche il vettore* $\alpha x' + \beta x''$ *è elemento di* $F \cup G$ *avendo già assodato che l'elemento neutro, comune ad ogni sottospazio vettoriale, è (deve) essere elemento di* $F \cup G$.

Si ammetta, per ipotesi, sia $\alpha x' + \beta x'' \in F \cup G$. *La teoria, in versione qui semplificata, evidenzia che sorge una contraddizione nei termini che seguono: se* $y = \alpha x' + \beta x'' \in F$ *allora sarebbe* $y - \alpha x' = \beta x''$*che condurrebbe a due distinte rappresentazioni dello stesso elemento. Poiché x'* $\in F$ *e considerata la struttura di spazio vettoriale di F, data per ipotesi, allora* $\alpha x' \in F$ *ed anche* $y - \alpha x' \in F$. *Ma detto vettore* $y - \alpha x' \in F$ *sarebbe eguale al vettore* $\beta x''$*che non può essere elemento di* F *in quanto* $x'' \notin F$.

La considerazioni possono essere ulteriormente semplificate, senza perdita di generalità, ponendo $\alpha = \beta = 1_{\mathbb{K}}$.

La condizione per la quale l'insieme $F \cup G$ *è un sottospazio vettoriale è garantita sotto ipotesi specifiche, quali* $F \subset G$ *(oppure* $G \subset F$*). La spiegazione è banale. Infatti* $\binom{F \cup G}{F \subset G} \equiv F \cup G = G \leftarrow$*spazio vettoriale, per ipotesi. Quindi, nulla da dimostrare.*

Lo step successivo consiste – dato l'insieme $F \cup G$ *– è quello di definire* $Span(F \cup G)$ *e quindi considerare l'insieme i cui elementi sono le combinazioni lineari dei vettori elementi di* $F \cup G$.

$Span(F \cup G)$ *viene notoriamente chiamato somma di sottospazi vettoriali di un dato spazio vettoriale.*

Si pone $Span(F \cup G) \equiv F + G$

Se $F = \{u\}$ *e* $G = \{v\}$ *allora* $F + G = \{u + v : u \in F, v \in G\}$

Ciò premesso, è ora possibile dare conto delle due ulteriori proprietà dell'ortogonale, già ricordate e cioè che

$$(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$
$$(F \cap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$$

E' stata fornita la definizione $di\ F + G$ *inteso come l'insieme* $\{u + v : u \in F, v \in G\}$. *Occorre ora definire l'ortogonale* $(F + G)^{\perp}$ *di* $F + G$. *L'ortogonale* $(F + G)^{\perp}$ *di* $F + G$ *è costituito da tutti e soli gli elementi* $e \in E$ *tali sia verificata la condizione*

$$\varphi(u + v, e) = \overline{\varphi(e, u + v)} = 0$$

Sviluppando il primo membro si può affermare che

$$\varphi(u + v, e) = \varphi(u, e) + \varphi(v, e)$$

In definitiva $(u + v) \perp e \Rightarrow \begin{pmatrix} u \perp e \\ v \perp e \end{pmatrix}$. *Tale implicazione – ritenendo peraltro che più propriamente si tratti di una coimplicazione – vale per ogni* $e : e \in (F + G)^{\perp}$ *(per la definizione di ortogonale) e in via di pura definizione risulta vero che gli insiemi* $(F + G)^{\perp}$, $F^{\perp}$, *e* $G^{\perp}$ *contengono elementi di E, spazio vettoriale dato.*

Se la relazione $\varphi(u+v,e)=\varphi(u,e)+\varphi(v,e)$ *viene letta nel senso che da* $\varphi(u+v,e)=0$ *ottengo* $\varphi(u,e)+\varphi(v,e)=0$ *cioè formalmente* $\varphi(u+v,e)=0\rightarrow\varphi(u,e)+\varphi(v,e)=0$ *deve far ritenere che sia vero che* $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}=G^{\perp}$ *. Ma se* $F^{\perp}=G^{\perp}$ *allora si può scrivere che* $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}=G^{\perp}=F^{\perp}\cap F^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$ *.*

Occorre porre l'attenzione all'altro lato della relazione (altra implicazione costituente la coimplicazione di interesse).

Si tratta di porre l'attenzione sulla parte $\varphi(u,e)+\varphi(v,e)=0\rightarrow\varphi(u+v,e)=0$ *quando sia imposto* $\varphi(u,e)=0\ \ e\ \varphi(v,e)=0$ *(impostazioni che appaiono coerenti con la volontà di definire i due ortogonali di F e di G) deve risultare* $\varphi(u+v,e)=0$*.*

Si potrebbe, al riguardo, obiettare la necessità di un previo "ritocco" formale della formulazione nel senso seguente $(\varphi(u,e')=\varphi(v,e'')=0)\rightarrow\varphi(u+v,e)=0$*.*

Con ciò si aprirebbe la strada all'ipotesi $F^{\perp}\neq G^{\perp}$*. In questo caso interverrebbe la condizione per la quale* $F^{\perp}\cap G^{\perp}=\{0\}$*. Pertanto, in questo caso la relazione* $\varphi(u+v,e)=0$ *sarebbe verificata per* $e=0_E$*.*

In ogni caso non può risultare $F^{\perp}\cap G^{\perp}=\emptyset$*. Fuori da ipotesi estremali deve ritenersi che ragioni di coerenza logica impongano che quando si tratti* $(\varphi(u,e')=\varphi(v,e'')=0)\rightarrow\varphi(u+v,e)=0$ *debba ritenersi che* $\{e\}=\{e'\}\cap\{e''\}$*.*

Il simbolo $\rightarrow$ *è inteso "si ottiene".*

Dato $A\subset E$*, essendo E un insieme con struttura di spazio vettoriale è già stata evidenziata la natura di sottospazio vettoriale dell'ortogonale* $A^{\perp}$*. Occorre ora evidenziare che trattasi di un chiuso.*

in lavorazione

Basi ortogonali

La nozione di base di uno spazio vettoriale lineare è elementare e alquanto importante nelle applicazioni. Sia dato uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Ciò posto, n vettori linearmente indipendenti costituiscono una possibile base. Dato uno spazio vettoriale ed una delle possibili basi ogni elemento dello spazio considerato può essere scritto, in unico modo, come combinazione lineare dei vettori costituenti la base.

Una base di uno spazio vettoriale è detta ortogonale se ogni elemento di essa (sempre vettori linearmente indipendenti) è ortogonale ad ogni altro vettore della base.

Se e_i *e* e_j *sono due qualunque elementi della base risulta* $\varphi(e_i\,, e_j) = 0$.

Pertanto una base è ortogonale se quando $i \neq j$ *con* $1 \leq i \leq n$ *e* $1 \leq j \leq n$ $\varphi(e_i\,, e_j) = 0$. *Una base ortogonale è ortonormale se vige una ulteriore condizione aggiuntiva, quella per la quale* $\|e_i\| = 1$. *E' il caso della base* $(\boldsymbol{i}\,, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ *di* $\mathbb{R}^3$.

Sia $k \leq n = dimV$ *e sia dato l'insieme dei vettori a due a due ortogonali* $(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_k)$. *Sia data la combinazione lineare in notazione di Einstein* $\alpha_i e_i$ *eguagliata allo zero di V. Se* $\alpha_i e_i = 0_V$ *con* $\alpha_i = 0$ *identicamente allora i vettori* e_i *sono linearmente indipendenti. Sia* $e_j \in (e_1, e_2, \ldots\ldots, e_k)$.

Si consideri il prodotto scalare $(\alpha_i e_i\,, e_j)$ *dove il primo vettore deve essere inteso scritto in notazione di Einstein.*

Detto prodotto scalare può essere declinato in forma estesa ponendo

$$(\alpha_i e_i\,, e_j) = \alpha_1(e_1\,, e_j) + \alpha_2(e_2\,, e_j) + \cdots . + \alpha_j(e_j\,, e_j) + \cdots . + \alpha_k(e_k\,, e_j)$$

Per quanto posto l'unico prodotto interno non nullo (essendo $e_j \neq 0_V$*) è* $(e_j\,, e_j)$ *e la condizione* $(\alpha_i e_i\,, e_j) = 0$ *impone sia* $\alpha_j = 0$.

Sarebbe $(\alpha_i e_i\,, e_j) = \alpha_j(e_j\,, e_j) = \alpha_j \|e_j\|^2 = 0$ *quindi* $\alpha_j = 0$

Nelle righe precedenti si è dato conto di un esito che può essere formalizzato come segue:

Dato uno spazio prehilbertiano E e dato un insieme di vettori $\{e_1, e_2, \ldots . , e_p\} \equiv (e_i)_{i\in I}$ *con* $i \in I \subset \mathbb{N}$ *vale la seguente implicazione*

$$\begin{pmatrix} (e_i)_{i\in I} : \varphi(e_j, e_k) = 0 \; \forall j \neq k \\ e_i \neq 0_E \;\; \forall i \in I \end{pmatrix} \Rightarrow e_i \in (e_i)_{i\in I} \text{ sono vettori linearmente indipendenti}$$

Se si ha una base ortonormale il prodotto scalare è definito dalla δ *di Kronecker per la quale* $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ *con* $\delta_{ij} = 1$ *quando* $i = j$ *e* $\delta_{ij} = 0$ *quando* $i \neq j$.

In $\mathbb{R}^3$ *si ha la seguente matrice rappresentativa del prodotto scalare*

$(.)$	e_1	e_2	e_3
e_1	1	0	0
e_2	0	1	0
e_3	0	0	1

E' immediato, data la nozione di ortogonalità, enunciare il teorema di Pitagora generalizzato, che vale sia per gli spazi prehilbertiani reali che per quelli complessi.

Sovvengono banalmente relazioni già trovate.

Come è noto, già risulta che

$$\phi(x+y) = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\varphi(x,y))$$

Ma nella ipotesi $x \perp y$ risulta $\varphi(x,y) = 0$ quindi anche nel caso di spazio prehilbertiano da $\varphi(x,y) = 0$ si ottiene $Re(\varphi(x,y))$ pertanto

$$(\forall (x,y) \in E \times E \ : (\varphi(x,y) \Leftrightarrow \ x \ \perp \ y) \Leftrightarrow \phi(x+y) = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Agli stessi esiti, ovviamente, si perviene considerando $\phi(x-y)$

Nota la nozione di insieme (o famiglia) di vettori ortogonali di uno spazio vettoriale assegnato consente anche di dare significato al seguente teorema

$\forall\ (E\ ,\varphi)\ ,\ \forall(e_i)_{i\in I}$ *con* $i\ \in I\ \subset \mathbb{N}$ *:* $\varphi(e_j, e_k) = 0\ \forall j \neq k$ *si ha*

$$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$$

I vettori x_i *costituiscono una famiglia di vettori ortogonali e come tali sono ortogonali a due a due nel senso che comunque si prendano due vettori distinti il loro prodotto scalare si annulla.*

La precedente relazione può essere messa nella forma equivalente

$$\left\|x_1 + x_2 +, \dots, x_p\right\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots . + \|x_2\|^2$$

Si consideri il seguente prodotto scalare

$$\varphi\left(x_1\ , x_2 +, \dots, x_p\right) = \varphi(x_1\ , x_2) + \varphi(x_1\ , x_3) + \varphi\left(x_1\ , x_p\right) = 0 + 0 + \cdots + 0\ .$$

Dalla linearità del prodotto scalare consegue la immediata conseguenza che

$$x_1 \perp (x_2 +, \dots, + x_p)$$

Analogamente e iterativamente risulta

$x_2 \perp (x_3+, \dots, x_p)$

e in generale

$x_k \perp (x_{k+1}+, \dots, x_p)$

Ciò è coerente con la condizione di ortogonalità che caratterizza tutte le coppie dei vettori considerati vale la seguente coinplicazione

$\left(x_1 \perp (x_2+, \dots, +x_p)\right) \Leftrightarrow x_1 \perp x_j \; \forall j \; \in I - \{1\}\, I \subset \mathbb{N}$

In termini di norme si può scrivere la seguente implicazione

$\|x_1+x_2+, \dots, x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2+, \dots, +x_p\|^2$ *(banale applicazione del teorema di Pitagora in quanto* $x_1 \perp (x_2+, \dots, +x_p)$*). Tale argomentazione può essere iterativamente riprodotta con riferimento al vettore* $(x_2+, \dots, +x_p)$ *avendo che*

$\|x_2+, \dots, +x_p\|^2 = \|x_2\|^2 + \|x_3+, \dots, +x_p\|^2$ *e successivamente al vettore* $\left(x_3+ \cdots . +x_p\right)$*. Iterando il procedimento si ottiene la tesi, quindi*

$\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$ *sotto le condizioni poste.*

In generale se è data una famiglia di vettori a due a due ortogonali risulta verificata la seguente relazione

$\alpha_i x_i \perp \sum_{j\in I-\{i\}} \alpha_j x_j \quad \forall \alpha_k \in \mathbb{K}$

Somma diretta ortogonale. Supplementari e proiettori ortogonali.

Sia dato lo spazio prehilbertiano $(E\ ,\varphi)$. *Si considerino n sottospazi vettoriali di E. Detti sottospazi sono* $E_{i\leq n}$ *e si ponga che siano a due a due ortogonali. Se* $i \neq j$ *tale che max(i ,j)*$\leq$ n *allora deve essere (per ipotesi) che*

$E_i \perp E_j$ *con* $i \neq j$.

Ciò significa che ogni elemento $v_i \in E_i$ *è ortogonale ad ogni* $w_j \in E_j$

In forma estesa si dovrebbe poter scrivere che $E_1 \perp E_2 \perp E_3 \perp \cdots . \perp E_n$

E', come noto, definita la somma diretta $\sum_{i=1}^{n} E_i$ *. La somma diretta nel contesto della ortogonalità degli spazi è nomata* <u>*somma diretta ortogonale*</u>.

$\perp$ *è il simbolo che la denota da intendere nei termini di una sommatoria.*

Si pone $\perp E_i = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots . + E_n$ *sotto la condizione* $E_1 \perp E_2 \perp E_3 \perp \cdots . \perp E_n$.

in lavorazione

Procedimento di ortogonalizzazione di Graham – Schmidt

Si è già avuto modo di ricordare che due elementi (vettori) *x* ed *y* di un dato spazio vettoriale sono ortogonali se il loro prodotto scalare è 0.

Si è detto che $x \perp y \iff \varphi(x, y) = 0$

Se è dato lo spazio vettoriale E e se è dato un sottoinsieme proprio di E non vuoto, denotato con $E' \neq \emptyset$, allora E' è detto ortogonale se $\forall (x', y') \in E' \times E'$ è vero che $x' \perp y'$.

Ulteriormente E' è detto ortonormale se oltre a $x' \perp y'$ risulta $\|v'\| = 1 \ \forall v' \in E'$.

Un esempio banale di insieme ortonormale è – con riferimento a $\mathbb{R}^3$ – l'insieme $\{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\} \equiv \{i\ , j, k\}$ che definisce la base ortonormale canonica di $\mathbb{R}^3$, una delle possibili basi, quella usualmente utilizzata. Gli elementi della base, come è noto, sono linearmente indipendenti.

E' altresì noto che dato uno spazio vettoriale *E ed una base ortogonale (o meglio ortonormale) ogni vettore di E può essere scritto, in unico modo, come una combinazione lineare degli elementi che costituiscono la base.*

Si pone $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ *essendo* e_i *i versori di base*

Si dimostra che $\alpha_i = \varphi(x\ , e_i)$. *I numeri* α_i *sono comunemente detti coefficienti di Fourier.*

Da $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ *si ottiene la forma estesa ponendo*

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_n e_n$$

E' quindi possibile considerare il prodotto scalare

$$\varphi(x, e_j) = \varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_n e_n\ , e_j)$$

Per la proprietà di linearità il secondo membro può essere riscritto come segue

$$\varphi(x, e_j) = \varphi(\alpha_1 e_1, e_j) + \varphi(\alpha_2 e_2, e_j) + \cdots .. + \varphi(\alpha_j e_j, e_j) + \cdots . + \varphi(\alpha_n e_n, e_j) \quad \text{quando } j \neq n.$$

In questo caso si può riformulare il secondo membro ponendo

$\varphi(x, e_j) = \alpha_1\varphi(e_1, e_j) + \alpha_2\varphi(e_2, e_j) + \cdots .. + \alpha_j\,\varphi(e_j, e_j) +$

$\cdots . + \alpha_n\varphi(e_n, e_j)$ *quando* $j \neq n.$

Risulta $\varphi(x, e_j) = \alpha_j\,\varphi(e_j, e_j) = \alpha_j$ *in quanto* $\varphi(e_j, e_j) = 1$ *essendo* $\|e_j\| = 1$ *ed essendo* $\varphi(e_k, e_j) = 0$ *(condizione di ortogonalità) quando* $k \neq j.$

Una riscrittura conveniente per il vettore generico x è la seguente

$x = \alpha_j e_j = \varphi(x, e_j)e_j$ *da intendersi in notazione di Einstein.*

Qualora si operi con una base ortogonale ma non ortonormale i coefficienti di Fourier sono dati dalla ratio $\alpha_j = \frac{\varphi(x,e_j)}{\varphi(e_j,e_j)}$

In definitiva $\varphi(x, e_j)$ *denota la componente scalare nella direzione* e_j *– quando la base è ortonormale.*

Una utile relazione è la cosiddetta identità di Parseval. Dato uno spazio vettoriale di dimensione finita n e data una base ortonormale si ha

$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)\overline{(y, e_\iota)}$

Posto $x = y$ *si ha* $\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)\overline{(x, e_\iota)} = \sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$

$Da\ \ x = \alpha_j e_j = \varphi(x, e_j)e_j$ *da intendersi in notazione di Einstein si può scrivere* $y = \beta_j e_j = \varphi(y, e_j)e_j$

Quindi si ha $\begin{cases} x = \varphi(x, e_j)e_j \\ y = \varphi(y, e_j)e_j \end{cases}$ *E' quindi possibile scrivere il prodotto scalare come segue*

$\varphi(x, y) = \varphi(\varphi(x, e_j)e_j\,, \varphi(y, e_j)e_j)$

I vettori $\varphi(x, e_j)e_j$ *e* $\varphi(y, e_j)e_j$ *dati in notazione di Einstein possono essere sviluppati come segue*

$$\varphi(x, e_j)e_j = \varphi(x, e_1)e_1 + \varphi(x, e_2)e_2 + \cdots . + \varphi(x, e_n)e_n$$

$$\varphi(y, e_j)e_j = \varphi(y, e_1)e_1 + \varphi(y, e_2)e_2 + \cdots . + \varphi(y, e_n)e_n$$

Si tratta quindi di sviluppare il seguente prodotto scalare

$$(\varphi(x, e_1)e_1 + \varphi(x, e_2)e_2 + \cdots . + \varphi(x, e_n)e_n \ , \varphi(y, e_1)e_1 + \varphi(y, e_2)e_2 + \cdots . + \varphi(y, e_n)e_n) = \varphi(x, e_j)e_j \overline{\varphi(y, e_j)e_j}$$ *(in notazione di Einstein).*

La formula si ottiene immediatamente utilizzando la proprietà di linearità del prodotto interno e tenendo conto del fatto che si opera utilizzando una base ortonormale.

Infatti, per ognuno dei vettori della combinazione lineare primo termine del prodotto scalare si ha

$$(\varphi(x, e_i)e_i)(\varphi(y, e_1)e_1 + \varphi(y, e_2)e_2 + \varphi(y, e_1)e_1 + \varphi(y, e_2)e_2 + \cdots . + \varphi(y, e_i)e_i + \cdots . + \varphi(y, e_n)e_n) = \varphi(x, e_i)e_i\overline{\varphi(y, e_1)e_1} + \varphi(x, e_i)e_i\overline{\varphi(y, e_2)e_2} + \cdots . + \varphi(x, e_i)e_i\overline{\varphi(x, e_\iota)e_\iota} + \cdots . + \varphi(x, e_i)e_i\overline{\varphi(y, e_n)e_n} = \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(y, e_1)}e_ie_1 + \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(y, e_2)}e_ie_2 + \cdots . + \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(y, e_\iota)}e_ie_i + \cdots . + \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(y, e_n)}e_ie_n = 0 + \cdots . + \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(y, e_\iota)} + \cdots + 0 = \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(y, e_\iota)}$$ ←*simmetria hermitiana.*

Infatti occorre tenere conto che $e_ie_j = 0$ *quando* $i \neq j$ *e che* $e_ie_i = (e_i)^2 = \|e_i\|^2 = 1$ *in quanto* $\|e_i\| = 1$.

Posto $x = y$ *si ha* $(x, x) = \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(x, e_\iota)}$ *(in notazione di Einstein)*

Se si opera in un $\mathbb{R}$ *−spazio vettoriale si ottiene il cosiddetto teorema di Pitagora generalizzato.*

Infatti in $\mathbb{R}$ *si ha* $\varphi(x, e_i) = \overline{\varphi(x, e_\iota)}$ *e quindi*

(x, x)$= \|x\|^2 = \varphi(x, e_i)\overline{\varphi(x, e_\iota)} = \varphi(x, e_i)\varphi(x, e_i) = \left(\varphi(x, e_i)\right)^2 = |\varphi(x, e_i)|^2$ *(dove il secondo membro deve essere inteso in notazione di Einstein).*

In definitiva $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x, e_i)|^2$

E' ora possibile procedere con la costruzione di insiemi ortogonali e in particolare il cosiddetto procedimento di ortogonalizzazione di Gram e Schmidt.

Viene solitamente enunciato un teorema di esistenza per il quale "ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette almeno una base ortonormale" .

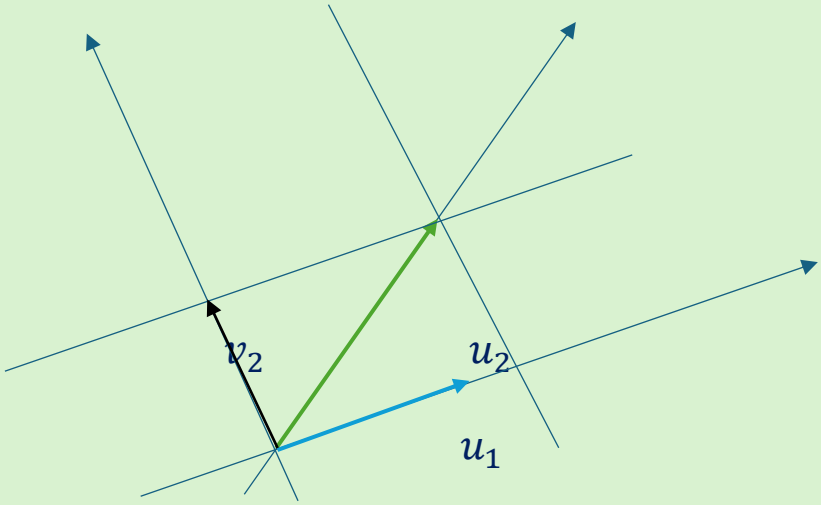
Dato uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n ed assegnata una base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$. *Nel caso più generale deve intendersi che detta base non sia né ortogonale nè tantomeno ortonormale. Dalla base* $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ *è possibile ottenere una base i cui componenti hanno norma unitaria ponendo* $(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\right)$. *I vettori* $e_{i \leq n}$ *sono tali che* $\|e_i\| = 1$.

E' utile ricordare che due vettori di una base sono linearmente indipendenti.

Il primo elemento della base ortonormale da trovare è il vettore unitario (versore) e_1

Occorre trovare un vettore v_2 *che deve essere ortogonale a* e_1 *cioè tale che* $\varphi(v_2, e_1) = 0$, *per quanto già ricavato in precedenza.*

Si può fare una esemplificazione grafica a partire da $\mathbb{R}^2$. *Esiste una direzione arbitraria che individua la direzione del vettore* e_1.



I vettori u_1 *e* u_2 *devono considerarsi un dato del problema, essendo gli elementi (una delle possibil infinite coppie di vettori linearmente indipendenti). Nella costruzione si tiene conto della regola del parallelogramma di Newton.*

Si può porre $\alpha u_1 + v_2 = u_2$ *da cui si ottiene* $v_2 = u_2 - \alpha u_1 \neq 0_{V^2}$ *Il vettore* v_2 *è ortogonale al vettore* u_1 *e quindi anche al vettore* αu_1 *ed altresì al vettore (unitario, versore)* $\frac{u_1}{\|u_1\|} = e_1$. *Si può quindi ammettere che* $\varphi(v_2\,, e_1) = 0$. *Pertanto si ha*

$\varphi(v_2\,, e_1) = \varphi(u_2 - \alpha u_1\,, e_1) = \varphi(u_2 - \alpha u_1\,, e_1) = \varphi(u_2, e_1) -$

$\alpha\varphi(u_1\,, e_1) =$ *da cui* $\varphi(u_2, e_1) = \alpha\varphi(u_1\,, e_1)$ *che consente di porre* $\alpha = \frac{\varphi(u_2, e_1)}{\varphi(u_1\,, e_1)}$

con $\varphi(u_1\,, e_1) \neq 0$ *in quanto* $u_1 \neq 0_{V^2}$

Sostituendo in formula si ha $v_2 = u_2 - \alpha u_1 = u_2 - \frac{\varphi(u_2, e_1)}{\varphi(u_1\,, e_1)} u_1$

Si osservi che $\frac{\varphi(u_2, e_1)}{\varphi(u_1, e_1)} u_1 = \frac{\varphi(u_2, e_1)}{\|u_1\|\|e_1\|} u_1 = \varphi(u_2,\ e_1) \frac{u_1}{\|u_1\|} = \varphi(u_2,\ e_1) e_1$

Con questi passaggi si può infine scrivere che $v_2 = u_2 - \alpha u_1 = u_2 - \varphi(u_2,\ e_1) e_1$

Poiché si deve costituire una base ortonormale occorre imporre $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{u_2 - \varphi(u_2, e_1) e_1}{\|v_2\|}$

La formula è coerente perché la base (u_1, u_2) *è data quindi è altresì dato* e_1 *e il prodotto scalare* $\varphi(u_2,\ e_1)$ *è parimenti calcolabile.*

Operando in $\mathbb{R}^2$ *il procedimento è concluso in quanto sono stati individuati due vettori* (e_1, e_2) *linearmente indipendenti costituenti la base ortonormale associata alla base* (u_1, u_2) *di vettori di norma non necessariamente unitaria né ortogonali tra loro.*

E' evidente che $e_1 = e_1(u_1)$ *e che* $e_2 = e_2(u_1, u_2)$

Operando in spazi vettoriali di dimensione finita $n \geq 3$ *il procedimento deve essere reiterato dovendo determinare i vettori*

$v_n = u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$ *imponendo le condizioni* $\varphi(v_n, e_{j \in \{1, n-1\} \subset \mathbb{N}} = 0$ *e* $\alpha_i \neq 0.$

Complementi ortogonali. Decomposizione ortogonale.

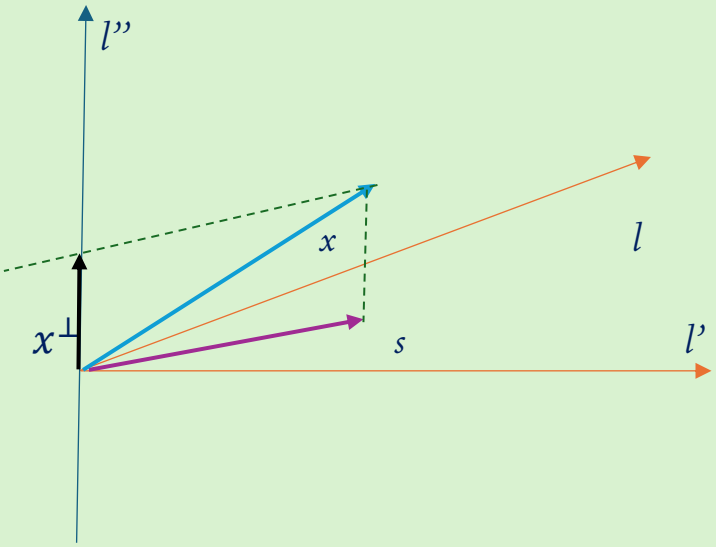
Sia dato uno spazio vettoriale E di dimensione finita n ed un suo sottospazio S di dimensione $m < n$. *Sia* x *un elemento di E e sia y un elemento di S. E' nota la sostanziale coincidenza tra vettore (elemento dello spazio vettoriale lineare assegnato) e punto dello spazio (spazio c.d. puntuale, cioè costituito da punti). Può essere introdotto un problema di minimo. Se x è un vettore di E si deve trovare un y elemento di S tale che la distanza tra detti punti sia un minimo.*

Deve essere $\|x - y\| \leq \|x - y'\| \ \forall y' \in S : y' \neq y$

Anche in questo caso sovviene la regola del parallelogramma di Newton quando si consideri il caso particolare di $\mathbb{R}^3$ *e di un suo sottospazio quale* $\mathbb{R}^2$.

Sia x un elemento di $\mathbb{R}^3$. *Poiché* $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ *è possibile che l'elemento x sia, oltre che elemento di* $\mathbb{R}^3$ *pure elemento di* $\mathbb{R}^2$. *Si tratta di un caso banale. Fuori da questa ipotesi è possibile che risulti* $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^3 \\ x \notin \mathbb{R}^2 \end{cases}$ *In questo caso x non giace nel piano definito dalle rette non parallele l e l'.*

Sovviene in questo caso la seguente rappresentazione grafica.



Le rette l e l' definiscono un piano. La retta l'' è ad esse ortogonale.

Dalla regola del pallelogramma di Newton risulta che $x = s + s^{\perp}$.

Dal punto di vista metrico i vettori $(x, s, s^{\perp})$ *sono legati dalla relazione pitagorica per la quale*

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^{\perp}\|^2$$

In realtà quello enunciato è un vero e proprio teorema che rigorosamente deve essere dimostrato, a prescindere dalla dimensione finita dello spazio vettoriale.

In definitiva, assegnato uno spazio vettoriale V di dimensione m ed un sottospazio vettoriale di V denotato con la lettera S sia data una base ortonormale di vettori $\{e_{i\leq n}\}$.

Il vettore $s \in S$ *è esprimibile in unico modo come combinazione lineare. In notazione di Einstein può essere scritto* $s = \varphi(x, e_i)e_i$ *. Risulta altresì che* $s^{\perp} = x - s$. *Se* $x \notin S$ *allora* $s^{\perp} \notin S$. *Ulteriormente se è dato uno spazio vettoriale di dimensione* $m > n$ *esiste una base ortonormale di vettori di norma unitaria* $\{e_{j\leq m}\}$. *Deve ritenersi vera la condizione* $\{e_{i\leq n}\} \subset \{e_{j\leq m}\}$ *con* $i \in \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ *e* $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ *essendo* $n < m$.

Il caso $n = m$ *è quello per il quale* $\begin{cases} x \in V^m \\ x \in S^{n\leq m} \end{cases} \Rightarrow s^{\perp} = 0_{S^{\perp}}$

Fuori da questo caso $s^{\perp} \neq 0_{S^{\perp}}$

In questo caso nello specifico si ha $s^{\perp} = x - s \neq 0_{S^{\perp}}$. *Anche elementarmente se* $x = s$ *si ha* $s^{\perp} = 0_{S^{\perp}}$.

Si è precisato che quando $x \notin S$ *ha significato la scrittura* $x = s + s^{\perp}$

E' quindi possibile lavorare sul prodotto scalare, utilizzando la formula di Parseval

$$\varphi(x\,, e_{n+1<k\leq m}) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(x\,, e_j)\,\overline{\varphi(e_k\,, e_j)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x\,, e_j)\,\overline{\varphi(e_k\,, e_j)}$$
$$+ \sum_{j=n+1}^{m} \varphi(x\,, e_j)\,\overline{\varphi(e_k\,, e_j)} = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x\,, e_j) * 0 +$$
$$\sum_{j=n+1}^{m} \varphi(x\,, e_j)\,\overline{\varphi(e_k\,, e_j)} = 0 \sum_{j=1}^{n} \varphi(x\,, e_j) +$$
$$\sum_{j=n+1}^{m} \varphi(x\,, e_j)\,\overline{\varphi(e_k\,, e_j)} = \sum_{j=n+1}^{m} \varphi(x\,, e_j)\,\overline{\varphi(e_k\,, e_j)} = \varphi(x\,, e_{j=k})$$

Quindi è possibile scrivere il vettore x ponendo

$$x = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x\,, e_i)e_i + \sum_{j=n+1}^{m} \varphi(x\,, e_i)e_i$$

Tale risultato è formalmente coerente.

Si è tenuto conto che $\overline{\varphi(e_k, e_j)} = 0$ *identicamente quando* $j \in \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ *e* $k \in \{n+1, \dots., m\} \subset \mathbb{N}$ *quando* $k \neq j$.

Operatori lineari – parte introduttiva

Tra i termini "trasformazione", "applicazione" e "operatore" vige un sostanziale rapporto di sinonimia. Di fatto si è già avuto modo di utilizzare la nozione di applicazione lineare o come altrimenti si può dire di operatore lineare.

Si utilizza ordinariamente il linguaggio delle funzioni. Un operatore T è una legge di corrispondenza che associa ad elementi di un insieme (c.d. dominio) uno ed un solo elemento di un altro insieme.

Formalmente si scrive $T : V \to W$ tale che $x \xrightarrow{T} T(x)$. E' ammesso il caso di un operatore $T : V \to V$. In questo caso si parla di endomorfismo.

Negli sviluppi si presuppone che gli insiemi $V \; e \; W$ abbiano struttura di spazio vettoriale.

Non ogni applicazione tra spazi vettoriali è lineare.

La condizione per la quale un operatore T tra due spazi vettoriali, inteso quindi come uno strumento che fa corrispondere un elemento di uno spazio vettoriale ad un elemento di un altro spazio vettoriale, sia lineare è che siano verificate entrambe le condizioni seguenti, valide $\forall (x, y) \in V \times V$ e $\forall \; k \in \mathbb{K}$

$T(x + y) = T(x) + T(y)$

$T(kx) = kT(x) \; \forall \; k \in \mathbb{K}$

Sovente dette formule vengono compendiate dalla seguente

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$$

E' utile ricordare alcune nozioni strettamente essenziali quali quella di nucleo di una applicazione lineare. Trattasi degli elementi $x \in V$ per i quali risulta $T(x) = 0$. Il nucleo di una applicazione è sovente chiamato *kernel* dell'applicazione $ker\ T = \{x : x \in V\ , T(x) = 0\}$.

Come è noto, $T(0_V) = 0_W$. Il punto è se $ker\ T = \{0_V\}$ oppure se contiene elementi ulteriori. Quello per il quale $ker\ T = \{0_V\}$ è un caso importante in quanto in questo caso l'applicazione è iniettiva su V. Può essere anche il caso che $ker\ T = V$. Si pensi ad una applicazione lineare del tipo $x \xrightarrow{T} T(x) = 0_W$ identicamente $\forall x : x \in V$.

Tom Mike Apostol nella sua Geometria definisce altresì la nozione di codominio di una applicazione lineare che vorrei definire come l'immagine o la trasformazione dei vettori di V in vettori di W secondo la legge di corrispondenza assegnata. E' evidentemente una relazione tra gli insiemi V e T(V).

In particolare l'insieme T(V) è l'insieme i cui elementi sono il risultato dell'applicazione $x \xrightarrow{T} T(x)$, elementi di W.

Formalmente si può scrivere $T(V) = \{w \in W : \exists x \in X : T(x) = w : w \in W\}$. T(V) contiene tutti e soli gli elementi di W che sono il "risultato" della trasformazione T assegnata.

Detto insieme ha struttura di spazio vettoriale. In definitiva se è assegnata una applicazione lineare T e si ammette siano $w\ e\ w'$ due elementi di T(V). Per tale assunzione è vero che $w = T(x)$ e $w' = T(x')$. Allora sarebbe

$w + w' = T(x) + T(x') = T(x + x')$ (ultimo passaggio giustificato dal fatto che per ipotesi si ammette sia T un operatore lineare).

Sempre poiché T è un operatore lineare è assunto per vero che se $w = T(x)$ è un elemento di T(V) allora $\alpha w = T(\alpha x) = \alpha T(x)\ \forall \alpha :\ \alpha \in \mathbb{K}$.

Posto $\alpha = 0$ si ha $\alpha T(x) = 0_W$. Posto $x = 0_V$ allora risulta $T(\alpha x) = T(\alpha 0_V) = T(0_V)$ *comunque sia* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Ma deve essere* $T(0_V) = \alpha w$ *sicuramene verificata se* $\alpha = 0$. *La relazione* $T(\alpha 0_V) = T(0_V)$ *può essere riscritta nella forma*

$\alpha T(0_V) = T(0_V)$.

$T(0_V)$ deve essere inteso in senso di unicità in quanto se T consentisse a 0_V di essere mandato in due distinti elementi di W allora non si tratterebbe di una applicazione nel senso standard.

Ma detta forma deve essere vera $\forall \alpha$ in quanto le due forme sono equivalenti, potendo scrivere che $T(\alpha 0_V) = T(0_V) \Leftrightarrow \alpha T(0_V) = T(0_V)$. Se $T(0_V) \neq O_W$ sarebbe vero che al variare di α esisterebbe un $\omega \neq O_W$ per il quale $\alpha\omega = \omega \in T(V) - \{0_W\}$. Detta relazione sarebbe vera in generale e non solo per $\alpha = 1$. Ciò introduce una invalidità non sanabile.

Sono di sicuro interesse le operazioni algebriche riferite alle trasformazioni lineari. L'insieme delle trasformazioni lineari tra due spazi vettoriali è denotata $\mathcal{L}(V, W)$ e insiemisticamente si scrive $\mathcal{L}(V, W) = \{T :\ \forall (x, y) \in V' \times V' \subseteq$

$V \times V, \forall \alpha \in \mathbb{K}, T(x+y) = T(x) + T(y),\ T(\alpha x) = \alpha T(x) :\ T(.) \in T(V') \subseteq W\ \}$.

Generalmente gli spazi *V e W* sono entrambi o $\mathbb{R}$ −spazi vettoriali o entrambi $\mathbb{C}$ − spazi vettoriali. Si dice che essi hanno gli stessi scalari.

Siano T e T' due elementi (operatori lineari) di $\mathcal{L}(V, W)$. Per definizione si pone che

$(T + T')(x) = T(x) + T'(x)$

$(cT)(x) = cT(x)$

comunque si prenda $x\ in\ V$.

Se dette relazioni sono assunte in via di definizione si deve ammettere che l'insieme degli operatori lineari abbia struttura di spazio vettoriale. La via alternativa presuppone, partendo dall'ipotesi che siano assegnati due operatori lineari, elementi di $\mathcal{L}(V, W)$, *indicati come operatori T e T' risulti che l'operatore T+T' e l'operatore cT, essendo c uno scalare (reale o complesso, a seconda dei casi) sono elementi di* $\mathcal{L}(V, W)$.

L'implicazione $T \in \mathcal{L}(V, W) \Rightarrow cT \in \mathcal{L}(V, W)\ \forall c \in \mathbb{K}$ *è di tutta evidenza.*

Vorrei evitare un passaggio del tipo $T(cx) = cT(x) = (cT)(x)$.

La precedente $T \in \mathcal{L}(V, W) \Rightarrow cT \in \mathcal{L}(V, W)\ \forall c \in \mathbb{K}$ *è formalmente vera anche per* $c = 0_{\mathbb{K}}$.

Formalmente per questa via viene introdotto l'elemento neutro di $\mathcal{L}(V, W)$ *indicato con*

$0_{\mathcal{L}(V,W)}$. *Per esso deve risultare* $T(x) + 0_{\mathcal{L}(V,W)}(x) = T(x)\ \forall T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\forall x \in V' \subseteq V$.

Il secondo punto è evidenziare che la somma di due trasformazioni lineari è equivalente alla trasformazione lineare somma. Che T e T' siano due applicazioni lineari è dato del problema. E' immediato, naturale, definire la somma di dette applicazioni dando senso alla scrittura $T(x) + T'(x)$ *. L'operazione di somma è assunta data non essendo necessario evidenziarne una motivazione specifica di utilizzabilità se non pratica e concreta, applicabile naturalmente. Occorre evidenziare che* $T(x) + T'(x) = S(x) = (T + T')(x)$ *dovendo evidenziare che deve risultare* $S = T + T'$.

Eseguire una somma di trasformazioni su un oggetto equivale a trasformare detto oggetto risultando S l'esito, la risultanza delle due (o più operazioni) attuate.

Le due trasformazioni sono tali che $T(x) + T'(x) = u + u' \in T(V)$ *coerentemente con la circostanza che T(V) è uno spazio vettoriale. Da ciò è naturale ritenere che* $u + u' = S(x)$. *Pertanto si può scrivere che* $T(x) + T'(x) = S(x)$. *Si ammetta per ipotesi che la trasformazione S sia lineare, sia cioè vero, per definizione, che S=* $T + T'$.

La scrittura $T(x) + T'(x)$ *sembra evocare due successioni "cronologicamente" non coeve. Dapprima tramite l'operatore T l'elemento x diviene T(x) indi lo stesso x viene trasformato in T'(x). Indi si considera il risultato delle due operazioni coordinate da* $+$. *Le due applicazioni possono essere equiparate ad un'unica applicazione S formalmente equivalente a* $T + T'$ *. Dal che consegue la linearità. E' immediata la commutatività.*

Più specificatamente, siano date due applicazioni lineari, T_1 *e* T_2 *, in ragione delle quali si può ammettere, comunque si considerino gli scalari* α, β, *elementi di* $\mathbb{K}$, *verificate – al variare di* x *e* y *in* V *–* *le seguenti due identità:*

$$T_1(\alpha x + \beta y) = T_1(\alpha x) + T_1(\beta y) = \alpha T_1(x) + \beta T_1(y)$$

$$T_2(\alpha x + \beta y) = T_2(\alpha x) + T_2(\beta y) = \alpha T_2(x) + \beta T_2(y)$$

Infatti, sommando membro a membro si ottiene

$$T_1(\alpha x + \beta y) + T_2(\alpha x + \beta y) = \alpha T_1(x) + \beta T_1(y) + \alpha T_2(x) + \beta T_2(y)$$

$$T_1(\alpha x + \beta y) + T_2(\alpha x + \beta y) = \alpha\big(T_1(x) + T_2(x)\big) + \beta\big(T_1(y) + T_2(y)\big)$$

Tali esiti – come l'osservazione del secondo membro evidenzia – sono coerenti con la definizione data per la quale $(T_1 + T_2)(\tau) = T_1(\tau) + T_2(\tau)\ \forall \tau\ \in V$.

Occorre evidenziare che comunque si prendano due scalari $(\varphi\ , \omega) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *– partendo dall'ipotesi che* T_1 *e* T_2 *siano due operatori lineari, l'operatore* $\varphi T_1 + \omega\ T_2$ *è un operatore lineare.*

Vale in generale la proprietà di omogeneità per la quale

$$\varphi T_1 + \omega T_2 = T\ \ \Rightarrow\ \theta(\varphi T_1 + \omega T_2) = \theta T\ \ \forall \theta\ \in \mathbb{K}.$$

D'altronde $\mathcal{L}(V\ , W)$ *è lo spazio delle applicazioni lineari, contiene sole e tutte le applicazioni lineari con rifermento agli spazi vettoriali considerati.*

La dimostrazione che $\mathcal{L}(V\ , W)$ *ha struttura di spazio vettoriale sembra più che altro confermativa della definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali (lineari). Dalla definizione consegue infatti, come ricorda Apostol nella sua Geometria, che sono verificati tutti gli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale lineare.*

Di tutt'altra natura è la composizione di due applicazioni lineari. In questo caso si rientra nelle logiche tipiche della nozione di funzione di funzione. Siano dati gli spazi U, V, W.

Sia data una applicazione lineare $T : U \to V$ *secondo lo schema* $x \overset{T}{\to} T(x) \in T(U) \subseteq V$.

Si consideri quindi una seconda applicazione $S : T(U) \subseteq V \to W$ *secondo lo schema* $T(x) \overset{S}{\to} S\big(T(x)\big) \in S(T(U)) \subseteq W$.

Solitamente si scrive $S\big(T(x)\big) = (ST)(x)$

Lo schema complessivamente considerato è il seguente

$$x \overset{T}{\to} T(x) \in T(U) \subseteq V \overset{S}{\to} S\big(T(x)\big) \in S(T(U)) \subseteq W$$

In termini sintetici ed equivalenti si può scrivere che

$$x \overset{ST}{\to} S\big(T(x)\big) \in S(T(U)) \subseteq W \quad \forall x \in U$$

In generale $ST \neq TS$ *(non vale la proprietà commutativa).*

E' immediato dimostrare che la composizione di trasformazioni lineari è una trasformazione lineare.

Se x ed y sono elementi di X allora lo è anche $\alpha x + \beta y$ *. Sia data la trasformazione lineare* $T : X \to Y$ *e si ponga T(x, y)=* $T(\alpha x + \beta y)$ *con ciò intendendo che all'elemento* $\alpha x + \beta y \ di \ X$ *è associato l'elemento T(x, y)=* $T(\alpha x + \beta y) \in T(X) \subseteq Y$. *Al solito* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

A questo punto si considera l'insieme $\{\varphi(x, y) = T(\alpha x + \beta y) \in T(X)\}$ *e quindi l'applicazione* $S : T(X) \subseteq Y \to Z$ *sintetizzata dal formalismo* $S : T(X) \to Z$.

Si ammetta che l'applicazione S sia lineare. Occorre studiare $S(T(\alpha x + \beta y)) = S\big(T(\alpha x) + T(\beta y)\big) = ST(\alpha x) + ST(\beta y) = \alpha ST(x) + \beta ST(y)$ *che comprova la linearità di* ST *quando le due applicazioni sono lineari. Se* $S \neq T$ *risulta in generale che*

$T(\alpha x + \beta y) \neq S(\alpha x + \beta y)$ *in quanto in generale* $\forall (x, y) \in X \times X$ *deve risultare che* $T(\alpha x + \beta y) \neq S(\alpha x + \beta y)$. *Infatti, fosse identicamente vero che* $T(\alpha x + \beta y) = S(\alpha x + \beta y)\ \forall (x, y) \in X \times X$ *le due applicazioni sarebbero eguali, sarebbero cioè la stessa funzione.*

Se si ammette in generale la commutatività delle due applicazioni sarebbe identicamente vero che $TS(x) = ST(x)$ *per ogni x di V. Sarebbe vero che* $S(T(\alpha x + \beta y)) = T(S(\alpha x + \beta y))$. *Sviluppando i passaggi sarebbe* $S(T(\alpha x) + T(\beta y)) = T(S(\alpha x) + T(\beta y))$ *da cui* $ST(\alpha x) + ST(\beta y) = TS(\alpha x) + TS(\beta y)$ *da cui*

$\alpha ST(x) + \beta ST(y) = \alpha TS(x) + \beta TS(y)$. *Detta relazione è identicamente vera quando* $T(\tau) = S(\tau)\ \forall \tau \in V$. *Viene macroscopicamente ad evidenza che detta eguaglianza è identicamente verificata* $\forall (x\ , y) \in V \times V$ *quando sia verificata la condizione* $ST = TS = Id_{\mathcal{L}(V\ ,W)}(x) = x\ \ \forall x \in V$.

In questo caso particolare T è iniettiva su V ed ammette quindi l'inversa $T^{-1} = S$.

Trattasi delle trasformazioni lineari iniettive per le quali, come già noto, $\ker(T) = \{0_V\}$.

Fermi restando gli sviluppi in tal senso, è utile concentrare l'attenzione sull'insieme $\mathcal{L}(V\ , W)$ *con particolare riferimento agli oggetti (elementi) che in esso sono contenuti.*

Ho avuto modo di constatare che, con riferimento a elementi di detto insieme e agli scalari associabili (elementi di $\mathbb{R}$ *o di* $\mathbb{C}$*), viene correntemente utilizzata, anche operativamente, la seguente relazione*

$T(\alpha x) = \alpha T(x) = (\alpha T)(x)$ *con equivalenza di significato.*

Ciò posto, deve ritenersi – almeno da un punto di vista formale – che la trasformazione che l'operatore T realizza sull'elemento $\alpha x \in V$, *comunque si prenda lo scalare* α *e comunque si*

prenda $x \in V$, è equivalente alla trasformazione operata dall'operatore αT sull'elemento x di V comunque si prenda x in V.

Il senso concreto della relazione suindicata è quello appena declinato.

Ci si deve però porre il problema di evidenziare – con la necessaria dimostrazione formale – che:

$$\forall\, \mathcal{L}(V\,,W), \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad T \in \mathcal{L}(V\,,W) \iff \alpha T \in \mathcal{L}(V\,,W)$$

Evidentemente la coimplicazione può essere scissa nelle due implicazioni seguenti

$$T \in \mathcal{L}(V\,,W) \Rightarrow \alpha T \in \mathcal{L}(V\,,W)$$

$$\alpha T \in \mathcal{L}(V\,,W) \Rightarrow T \in \mathcal{L}(V\,,W)$$

(Si deve ammettere implicitamente l'esistenza di αT dato T, dovendo giungere a concludere che αT è un operatore lineare (recte: se esiste esso è lineare), coerentemente con la prima implicazione da dimostrare).

Sia da dimostrare $T \in \mathcal{L}(V\,,W) \Rightarrow \alpha T \in \mathcal{L}(V\,,W)$. All'ipotesi $T \in \mathcal{L}(V\,,W)$ consegue la tesi $\alpha T \in \mathcal{L}(V\,,W)$, da dimostrare.

Poiché T è un operatore lineare (per ipotesi) risulta

$$T(a+b) = T(a) + T(b) \quad \forall (a\,,b) \in V \times V$$

Quindi si hanno i seguenti passaggi implicanti

$$T(a+b) = T(a) + T(b) \Rightarrow \alpha T(a+b) = \alpha\big(T(a) + T(b)\big) \Rightarrow (\alpha T)(a+b) = \alpha T(a) + \alpha T(b) = (\alpha T)(a) + (\alpha T)(b)$$

In definitiva dalla linearità di T si è pervenuti a quella di αT. Si è dimostrato che

$$T \in \mathcal{L}(V\ ,W) \Rightarrow\ \alpha T \in \mathcal{L}(V\ ,W)$$

Se si pone $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *si può scrivere che* $\alpha T \xrightarrow{\alpha=0_{\mathbb{K}}} 0_{\mathbb{K}}T \equiv 0_{\mathcal{L}(V\ ,W)} = T_0$ *(condizione di esistenza essenziale affinchè* $\mathcal{L}(V\ ,W)$ *sia uno spazio vettoriale lineare)*

Occorre ora considerare la seconda implicazione, costitutiva della coimplicazione, dando giustificazione della seguente

$$\alpha T \in \mathcal{L}(V\ ,W) \Rightarrow T \in \mathcal{L}(V\ ,W)$$

L'ammettere $\alpha T \in \mathcal{L}(V\ ,W)$ *presuppone la esistenza di* $T \in \mathcal{L}(V\ ,W)$ *di cui si deve dimostrare la linearità, quando sia ammessa la linearità (data per ipotesi) di* αT*. Tale argomentazione pare introdurre un circolo vizioso che peraltro dovrebbe risultare solo apparente.*

In prima battuta possono essere considerati i passaggi formali seguenti

$$(\alpha T)(a+b) = (\alpha T)(a) + (\alpha T)(b) \Rightarrow (\alpha)(T)(a+b) = (\alpha)(T)(a) + (\alpha)T)(b) = (T)(a+b) = T(a) + T(b)$$

In definitiva $\alpha T \in \mathcal{L}(V\ ,W) \Rightarrow T \in \mathcal{L}(V\ ,W)$

La giustificazione della seconda implicazione non pare viziata in considerazione della circostanza che l'ammettere esistente un operatore lineare αT *se implica l'esistenza dell'operatore T non implica ex se la sua linearità che, per contro, è stata ottenuta per via algebrica formale, operando esclusivamente sugli operatori.*

Pertanto è vera la coimplicazione

$$\forall \mathcal{L}(V\ ,W), \forall \alpha \in \mathbb{K}\quad T \in \mathcal{L}(V\ ,W) \Leftrightarrow\ \alpha T \in \mathcal{L}(V\ ,W)$$

In $\mathcal{L}(V\ ,W)$ *l'operatore identità è l'operatore che trasforma ogni x di V in se stesso.*

Formalmente si pone $\left(Id_{\mathcal{L}(V,W)}\right)(x) = x \ \forall x \in V$ *(banalmente è una iniezione che associa ad ogni elemento di x se stesso, quindi pure un endomorfismo giacchè particolare applicazione* $V \to V$*).*

E' utile ricordare che l'insieme $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ *delle applicazioni lineari da V a* $\mathbb{R}$ *è detto spazio duale ed è variamente indicato con* $V' o\, V^*$*.*

Più specificatamente l'insieme $\mathcal{L}(V, V)$ *che associa ad un elemento di V un elemento parimenti di V è detto operatore lineare.*

Si dice che due spazi vettoriali, V e W, sono isomorfi e si scrive $V \cong W$*, se l'applicazione* $T : V \to W$ *è invertibile.*

Occorre ora evidenziare che vale la proprietà associativa della composizione di applicazioni.

Si è già avuto modo di dimostrare che la composizione di applicazioni lineari è lineare. Risulta che $TS(u) = T\big(S(u)\big)$*.*

La proprietà associativa viene solitamente scritta ponendo

$$R(ST) = (RS)T$$

La scrittura $R(ST)$ *deve correttamente essere intesa come l'applicazione R dopo che è stata posta in essere l'applicazione ST che a sua volta è intendibile come la successiva applicazione dapprima di T indi di S.*

Il secondo membro è inteso come la previa applicazione T e la successiva applicazione RS.

Lo schema è il seguente

$$x \overset{T}{\to} T(x) \overset{S}{\to} S(T(x)) \overset{R}{\to} R\left(S\big(T(x)\big)\right) \equiv (RS)\big(T(x)\big)$$

Si è ottenuto il secondo membro è con ciò si è evidenziata l'associatività.

Valgono le due ulteriori proprietà

$$(S_1+S_2)T = S_1T + S_2T$$

Occorre concentrarsi sul primo membro. Si ha il seguente schema

$$x \overset{T}{\rightarrow} T(x) \overset{S_1+S_2}{\longrightarrow} (S_1+S_2)T\ (x)$$

Per il secondo membro è possibile osservare che partendo dall'applicazione T si ha

$$x \overset{T}{\rightarrow} T(x) \overset{S_1}{\rightarrow} S_1T(x)$$

$$x \overset{T}{\rightarrow} T(x) \overset{S_2}{\rightarrow} S_2T(x)$$

Le due forme sono equivalenti . Per la prima al vettore x è associato $(S_1+S_2)T\ (x)$ *per la seconda al vettore x è associato il vettore* $S_1T(x) + S_2T(x)$.

Occorre evidenziare che $(S_1+S_2)T\ (x) = S_1T(x) + S_2T(x)$

Si ponga per comodità T(x)= $y \in T(X)$.

Si ha $(S_1+S_2)y = S_1y + S_2y \quad \forall y \in T(X)$.

Si tratta di una immediata conseguenza del fatto che S_1 *e* S_1 *sono due applicazioni lineari e che lo è pure la loro somma* (S_1+S_2).

Analogamente si dimostra che

$$S(T_1+T_2) = ST_1 + ST_2$$

Si può scrivere

$$x \overset{T_1+T_2}{\longrightarrow} (T_1+T_2)(x)$$

Poiché le due applicazioni sono lineari anche T_1+T_2 *è lineare. Quindi è immediato poter scrivere che* $(T_1+T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$

Ammettiamo sia vero che $S(T_1+T_2)(x) = S\big(T_1(x) + T_2(x)\big)$

Si ammetta altresì vero che $ST_1(x) + ST_2(x)$.

Ammettiamo per comodità che $T_1(x) = y_1 \in T_1(X)$ *e* $T_2(x) = y_2 \in T_2(X)$

$T_1(x) + T_2(x) = y_1 + y_2$ *(che al di là del formalismo provvisorio devono essere elementi di uno stesso spazio vettoriale T(X)).*

Pertanto si ha $S(y_1 + y_2) = S(y_1) + S(y_2)$ *in quanto S è una applicazione lineare.*

Ma $S(y_1 + y_2) = S(y_1) + S(y_2)$ *equivale a quanto si intendeva dimostrare cioè a*

$S(T_1+T_2) = ST_1 + ST_2$ *in quanto* $y_1 + y_2 = (T_1+T_2)(x)$ *e* $y_1 = T_1(x), e\ y_2 = T_2(x)$.

Funzioni vettoriali di una variabile reale

Si denota E^X l'insieme i cui elementi sono le applicazioni di X in E. In altri termini, E^X è l'insieme delle funzioni $f : X \to E$. Non infrequentemente si considera $X \subset \mathbb{R}$ e sovente trattasi di un intervallo della retta reale.

Sono definite due distinte leggi, una interna denotata con $+$ ed una legge moltiplicativa esterna $*$, a volte giustapposta.

Si ammette siano verificate le seguenti condizioni

$(f + g)(x) = f(t) + g(t)$

$(\alpha f)(t) = \alpha(f(t))$

$\forall (f, g) \in E^X \times E^X$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Posto E= $\mathbb{K}$ viene definita una ulteriore legge di composizione per la quale

$(fg)(t) = f(t)g(t)$. Detta legge va intesa come il prodotto di due funzioni.

E^X ha struttura di spazio vettoriale. E' una immediata conseguenza di quanto ammesso per ipotesi. Infatti, se $f(t) \in E^X$ anche $\alpha f(t) \in E^X$. Analogamente se $g(t) \in E^X$ anche $\beta f(t) \in E^X$. Ma, poiché $\alpha f(t) \in E^X$ e $\beta f(t) \in E^X$ allora $\alpha f(t) + \beta f(t) \in E^X$. Ciò evidentemente vale $\forall (f, g) \in E^X \times E^X$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. E' definita una funzione $\tau(t) \in E^X$: $\forall t \in X$

$\tau(t) = 0_E$. Basta porre $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ per avere $\alpha f(t) = 0_{\mathbb{K}} f(t) = \tau(t) = 0_E$.

Detta funzione associa ad ogni elemento $t \in X$ l'elemento 0_E.

Ulteriormente, si può osservare che da $(f + g)(x) = f(t) + g(t)$ posto $g \equiv \tau$ si ha $(f + \tau)(x) = f(t) + \tau(t) = f(t)$ che non crea problemi formali.

Se $E = \mathbb{K}$, essendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'insieme $\mathbb{K}^X$ è una $\mathbb{K}-$algebra unitaria, associativa e commutativa.

Siano infatti date tre distinte applicazioni f, g, h elementi di $\mathbb{K}^X$. Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà $\forall (f , g, h) \in \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^X$,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \begin{cases} f(g + h) = fg + fh \\ (g + h)f = gf + hf \\ (\alpha f)g = \alpha(fg) = f(\alpha g) \end{cases}$$

Le prime due relazioni sono dette proprietà distributive. $\forall x \in X$ si ha un corrispondente valore di $f(x), g(x)\ e\ h(x)$ tutti elementi di $\mathbb{K}$.

Pertanto le due proprietà distributive sono ricondotte alle note proprietà dei numeri reali e dei numeri complessi. Analogamente si dimostra la terza proprietà, quella per la quale $(\alpha f)g = \alpha(fg) = f(\alpha g)$ valida $\forall(f, g) \in \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^X$, $\forall\alpha \in \mathbb{K}$.

La proprietà commutativa è parimenti dimostrata per rimando alle note proprietà del prodotto di scalari, reali o complessi. In definitiva $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ $\forall(f, g) \in \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^X$.

La proprietà associativa presuppone sia $f + (g + h) = (f + g) + h$ e la si dimostra sempre per rimando alle proprietà degli scalari.

Data la funzione $g \in \mathbb{K}^X$ è definita la funzione $\frac{1}{g}$ quando $\forall x \in X$ risulta $g(x) \neq 0$. Detta funzione viene scritta ponendo $\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)} : g(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$. Ha significato anche la scrittura $\frac{f}{g} \equiv f\frac{1}{g}$ nel senso di $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $g(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$.

Occorrerà attenzionare la scrittura $\mathbb{C}^X$ che astrattamente può avere il doppio significato di $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ o di $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$.

E^X è uno spazio vettoriale. Se $f \in E^X$ si considera

$\|f\| : X \to \mathbb{R}$ da intendersi nel senso che $t \xrightarrow{\|\ .\ \|} \|f(t)\|$ per la quale, quindi, ad ogni valore t di X è associato il numero reale $\|f(t)\|$.

Deve intendersi (punto da chiarire) che la scrittura $t \xrightarrow{\|\,.\,\|} \|f(t)\|$ deve intendersi equivalente – come pare essere – alla seguente

$t \xrightarrow{f} f(t) \xrightarrow{\|\,.\,\|} \|f(t)\|$ con $t \in [a\,,b]$

Si è già avuto modo di ricordare che $\frac{1}{g(x)}$ ha senso quando $g : g(x) \neq 0 \;\forall\, x \in X$ quando si voglia che $g \in E^X$.

Quando si pone $f \in \mathbb{C}^X$ si intende fare riferimento a funzioni del tipo

$f : X \to \mathbb{C}$ dove si può porre anche il caso $X \subseteq \mathbb{C}$

E' il caso, ad esempio, di una funzione che associa al valore complessa z una funzione del tipo $f(z) = u(z) + iv(z)$. Sia $z = x + iy$. Allora, come noto, si pone $u(z) = u(x,y)$ e $v(z) = v(x,y)$.

E' definita la funzione coniugata di f, indicata con $\bar{f}$, ponendo

$\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ quando sia $f(z) = u(x,y,) + iv(x,y)$

E' immediato constatare che $\overline{\overline{f(z)}} = f(z)$.

Se $f, g \in \mathbb{C}^X$ si dimostra che $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$

Se $f, g \in \mathbb{C}^X$ allora si ha $f + g \in \mathbb{C}^X$.

Ammetto sia vero che $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$. Allora considerando il coniugato di entrambi i membri si ha

$\overline{\overline{f+g}} = \overline{\bar{f} + \bar{g}}$ da cui si ottiene $f + g = \bar{\bar{f}} + \bar{\bar{g}} = f + g$.

Si dimostra che $\overline{\alpha\, f} = \bar{\alpha}\, \bar{f}$

Applicando l'operatore di coniugazione ad ambo i membri dall'ipotesi che sia $\overline{\alpha\, f} = \bar{\alpha}\, \bar{f}$ si ottiene $\overline{\overline{\alpha\, f}} = \overline{\bar{\alpha}\, \bar{f}}$ da cui si ottiene $\alpha\, f = \alpha\, f$ in quanto si può porre $\overline{\bar{\alpha}\, \bar{f}} = \bar{\bar{\alpha}}\, \bar{\bar{f}} = \alpha f$. Ciò è vero sia nel caso sia $\alpha \in \mathbb{R}$ sia nel caso $\alpha \in \mathbb{C}$.

Sia dato uno spazio vettoriale E con prodotto scalare (,) e due funzioni che ad un valore $t \in X$ fanno corrispondere un elemento di E.

Si ha che $f\,, g\ \in E^X$ l 'applicazione, quindi la funzione, che associa ad un $t -$ elemento di X – un elemento (f, g) di $\mathbb{K}$ secondo lo schema

$$t \xrightarrow{f\,,\ g} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \overset{(.)}{\to} (f(t), g(t)) \equiv (f\,, g)(t)$$

Risulta, con riferimento a questo punto, che $(g, f) = \overline{(f\,, g)}$ e che – seguendo l'impostazione di un testo francese che mi è risultato assai utile, si ha

$$(f\,, g_1 + \alpha g_2) = (f\,, g_1) + (f\,, \alpha g_2) = (f\,, g_1) + \alpha(f\,, g_2)$$

Al riguardo ci si sarebbe aspettati di trovare lo scalare $\bar{\alpha}$ in luogo di α rilevante quando $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$.

La differente declinazione della simmetria hermitiana può indurre nella tentazione di considerare errata una delle due modalità.

Per contro, deve ritenersi che entrambe le formalizzazioni siano accettabili, all'uopo ritenendo valide le due seguenti coimplicazioni.

$$\begin{array}{l} (\alpha x, y) = \alpha(x, y) \Leftrightarrow (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y) \\ \Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, (x\,, y) \in V \times V\ \,, \forall \alpha \in \mathbb{K} \\ (\alpha x, y) = \bar{\alpha}(x, y) \Leftrightarrow (x, \alpha y) = \alpha(x, y) \end{array}$$

Merita qualche cenno anche la *funzione prodotto vettoriale*.

Sia assegnato uno spazio vettoriale euclideo di dimensione tre orientato (assegnata quindi altresì una terna destrorsa) e sia data una applicazione che associa a due elementi di detto spazio due applicazioni f , g dell'insieme E^X definita dalla seguente formalizzazione:

$$f \times g : X \to E$$

Lo schema è il seguente. Per ogni $t \in X$ sono definite due funzioni vettoriali f e g (in definitiva due punti di E variabili nel dominio del tempo) cui è associata una funzione $f(t) \times g(t)$.

$$t \xrightarrow{f,\ t} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\times} f(t) \times g(t) \equiv (f \times g)(t)$$

Esso è anticommutativo e lineare.

Risulta infatti che

$$f(t) \times g(t) = -(g(t) \times f(t))$$

$$f(t) \times \big(g(t) + \alpha h(t)\big) = f(t) \times g(t) + f(t) \times \alpha h(t)$$

Il prodotto vettoriale è definito solo in $\mathbb{R}^3$.

Tutte le proprietà del prodotto vettoriale possono essere dimostrate a partire dalla sua formulazione in termini di determinante simbolico di Laplace. I due vettori x e y sono descritti in termini di combinazioni lineari dei vettori della base ortonormale (e_1, e_2, e_3).

La definizione data in fisica di prodotto vettoriale presuppone che detta base (quella ortonormale canonica) sia equiorientata rispetto alla base $(u, v, u \times v)$.

Occorre quindi studiare il cambiamento di base dalla base canonica alla base $(u, v, u \times v)$. E' data la formula del c.d. determinante simbolico di Laplace per il quale

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_1(u_2v_3 - v_2u_3) - e_2(u_1v_1 - v_1u_3) +$$

$$e_3(u_1v_2 - v_1u_2)$$

La matrice del passaggio di base deve essere tale che

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ u \times v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_2v_3 - v_2u_3 & u_1v_1 - v_1u_3 & u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Si dimostra agevolmente che il determinante della matrice $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_2v_3 - v_2u_3 & u_1v_1 - v_1u_3 & u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix}$ è positivo.

Le basi sono quindi equiorientate.

Considero ora le funzioni vettoriali. E è un $\mathbb{K}$ – spazio vettoriale munito della base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. $\forall\, x \in E \;\; \exists!\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che, in notazione di Einstein, sia

$$x = x_i e_i$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \; \exists\, f_j : E \to \mathbb{K} : \forall y \in E \;\; y = f_j(y) e_j$$

Sia $f : X \to E \;\; (f \in E^X)$ e sia $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ si hanno le funzioni scalari componenti della funzione vettoriale $f(t) \equiv (f_i(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ che essendo a valori vettoriali viene formalizzata ponendo

$f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)e_j$

Valgono le proprietà tipiche di linearità della somma e del prodotto per uno scalare, per le quali si ha $\begin{cases} (\lambda f)_j = \lambda f_j \\ (f+g)_j = f_j + g_j \end{cases} \forall k \in \mathbb{K}, f, g \in E^X, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Passando dalle componenti scalari alle funzioni vettoriali si ha

$$\left(\begin{cases} (\lambda f)_j = \lambda f_j \\ (f+g)_j = f_j + g_j \end{cases} \forall k \in \mathbb{K}, f, g \in E^X \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} f(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)e_j \Rightarrow kf(t) = k\sum_{j=1}^{n} f_j(t)e_j \\ (f+g) = f + g \end{pmatrix}$$

$(f+g) = f + g$ la funzione somma come somma delle due funzioni ! Una sorta di ovvietà.

Sia X $\subseteq \mathbb{R}$ simmetrico rispetto ad $x = 0$ tale che $\forall t \in X$ pure $-t \in X$.

Sotto questa condizione se $\forall t \in X = dom\, f$ risulta che $f(t) = f(-t)$ allora la funzione f è detta funzione pari.

Se invece $\forall t \in X = dom\, f$ risulta che $f(-t) = -f(t)$ la funzione f è detta funzione dispari. Dato X gli insiemi P_X e D_X indicano rispettivamente gli insiemi delle funzioni pari e dispari, definite in X.

Si tratta di due sottospazi vettoriali di $E^X = P_X \oplus D_X$ (detti sottospazi sono supplementari).

L'insieme P_X è un sottospazio vettoriale di E^X in quanto si può provare la chiusura nel senso che:

la funzione nulla $f(t) = 0\ \forall t\ \in X$ è elemento di P_X in quanto $f(t) = f(-t)$;

se $f(t) \in P_X$ banalmente si ha $\lambda f(t) \in P_X\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$;

se sono date due distinte funzioni $f(t), g(t) \in P_X$ allora $\forall t\ \in X$ si ha

$$f(t) = f(-t)$$

$$g(t) = g(-t)$$

Sommando membro a membro vale la seguente eguaglianza

$$f(t) + g(t) = f(-t) + g(-t)$$

$$(f + g)(t) = (f + g)(-t)$$

Si può in generale scrivere che

$\alpha f(t) + \beta g(t) = \alpha f(-t) + \beta g(-t)\ \forall \alpha, \beta$ elementi di $\mathbb{K}$.

Pertanto se $f\ e\ g$ sono elementi di P_X allora $(\alpha f + \beta g) \in P_X$.

Con analoghe considerazioni si evidenzia che $(D_X\ , +, \cdot)$ ha struttura di spazio vettoriale, essendo un sottospazio di E^X

E^X contiene funzioni pari, funzioni dispari e funzioni né pari né dispari. La funzione $f(t) = 0$ identicamente può essere intesa al contempo come funzione pari e funzione dispari.

La somma di una funzione pari e di una funzione dispari non è né pari né dispari. Sia f una funzione pari e g una funzione dispari. Si ha

$$f(t) = f(-t)$$

$$g(-t) = -g(t)$$

Sotto queste condizioni, si ammetta che la funzione somma sia una funzione pari. Allora sarebbe vero che

$h(t) = f(t) + g(t) = f(-t) + g(-t) = h(-t)$.

Da $f(t) + g(t) = f(-t) + g(-t)$ per sostituzione si può scrivere che

$f(t) + g(t) = f(t) - g(t)$ da cui l'assurdo che $g(t) = -g(t)$.

Si ipotizzi ora che la funzione somma sia dispari, dovendo quindi essere che

$h(t) = f(t) + g(t) = -(f(-t) + g(-t)) = -h(-t)$

Dovrebbe quindi aversi che $f(t) + g(t) = -\big(f(-t) + g(-t)\big) = -f(t) + g(t)$. Quindi si perverrebbe ad un risultato assurdo per il quale $f(t) = -f(t)$.

Concisamente si può scrivere che $E^X = P_X + D_X + \{\tilde{f} = f_{P_X} + f_{D_X}\}$. L'insieme $\{\tilde{f}\}$ contiene le funzioni né pari né dispari.

E' possibile trovare, per le funzioni, la notazione $\check{f}$ che definisce una applicazione da X a valori di E per la quale $t \xrightarrow{\check{f}} f(-t)$.

Risulta $\check{\check{f}} = f$. Infatti, $t \xrightarrow{\check{f}} \check{f}(t) = f(-t) \xrightarrow{\check{f}} \check{f}\, f(-t) = f(-(-t)) = f(t)$

L'applicazione $\check{f}$ gode delle seguenti proprietà:

$\widecheck{(f+g)} = \check{f} + \check{g}$ in quanto se $f(t) + g(t) = h(t)$ si ha $f(-t) + g(-t) = h(-t)$ e quindi $\check{f} + \check{g} = \check{h} = \widecheck{(f+g)}$. Risulta altresì che $\widecheck{\lambda f} = \lambda \check{f}$.

Se $\check{f} = f(-t)$ si ha $\widecheck{\lambda f} = f(-\lambda t) = \lambda f(-t) = \lambda f(-t)$.

Nel caso lo spazio vettoriale sia un campo, quindi per $E = \mathbb{K}$, risulta verificata la proprietà ulteriore per la quale

$$\widetilde{fg} = \breve{f}\,\breve{g}$$

Una ulteriore proprietà di cui godono determinate funzioni è la periodicità.

Sia $f \in E^X$. La funzione f è periodica di periodo T se esiste un T tale che $f + T$ appartiene al dominio della funzione, cioè se $(f + T) \in X$ per il quale $f(t) = f(t + T)\ \forall t\ \in X$.

Una funzione vettoriale è periodica se e solo f_i è periodica di periodo T.

Sia $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ si ha

$$f(t) = f(t + T)\ \forall t\ \in X \Leftrightarrow f_n(t) = f_n(t + T)\ \ \forall t\ \in X$$

L'insieme delle funzioni di periodo T e di dominio X è un sottospazio di E^X

Infatti, la funzione $f(t) = f(t + T) = 0\ \ \forall t\ \in X$ è l'elemento neutro additivo in detto insieme. Ciò vale in generale $\forall\, T$ e quindi anche per un assegnato T. $f(t) = f(t + T) = 0 = 0_{\{f(t)=f(t+T)\ |T\in X\}}$. Banalmente se $f\ e\ g$ sono elementi di $\{f(t) = f(t + T)\ _{|T\in X}\ \}$ allora anche la funzione

$(f(t) + g(t)) \in \{f(t) = f(t + T)\ _{|T\in X}\ \}$ ed altrettanto banalmente si ha che $f(t) \in \{f(t) = f(t + T)\ _{|T\in X}\ \} \Rightarrow \alpha f(t) \in \{f(t) = f(t + T)\ _{|T\in X}\ \}$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

In sintesi

$\forall \left(f(t), g(t)\right) \in \left\{f(t) = f(t+T)\ _{|T \in X}\ \right\}^2 \Rightarrow (\alpha f(t) + \beta g(t)) \in \left\{f(t) = f(t+T)\ _{|T \in X}\ \right\} \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Evidentemente tutte le funzioni considerate hanno il medesimo dominio di definizione.

Sia assegnata una funzione $f \in E^{\mathbb{R}}$ che nei termini generali ha dominio $\mathbb{R}$. Può essere introdotto il cosiddetto gruppo dei periodi.

Viene definito il seguente insieme

$P_f = \{\tau \in \mathbb{R} : \forall\ t\ \in dom\ f\ \ f(t+\tau) = f(t)\} \subset \mathbb{R}$ (è un sottogruppo di $\mathbb{R}$) . Banalmente $0 \in P_f$ in quanto $f(t+0) = f(t)$. Si ammetta $\tau_1 \neq \tau_2$ tali che risultino verificate le seguenti eguaglianze $\begin{cases} f(t+\tau_1) = f(t) \\ f(t+\tau_2) = f(t) \end{cases}$ allora risulta $f(t+\tau_1) = f(t+\tau_2) \Rightarrow \left((\tau_1 \tau_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\right) \in P_f$ formalmente .

Risulta vera la seguente implicazione $\begin{cases} f(t+\tau_1) = f(t) \\ f(t+\tau_2) = f(t) \end{cases} \Rightarrow f(t+\tau_1+\tau_2) = f(t)$. Poiché $\tau_1 \neq \tau_2\ \exists!\ \omega$ tale che $\tau_2 = \tau_1 + \omega$ allora si ha

$f(t+\tau_1+\tau_2) = f(t) \Rightarrow f(t+\tau_1+\tau_1+\omega) = f(t+\tau_1) = f(t) \Rightarrow$
$f\left((t+\tau_1)+\tau_1+\omega\right) \equiv f\left((t+\tau_1)+\tau_2\right) = f(t+\tau_1) = f(t).$

Il passaggio che porta a $f\left((t+\tau_1)+\tau_2\right) = f(t+\tau_1)$ è legittimo perché si è ammesso che $\tau_2 \in P_f$.

Si evidenzia che se $\tau \in P_f$ anche $-\tau \in P_f$ dovendo essere verificata la seguente coimplicazione $f(t+\tau_1) = f(t) \Leftrightarrow f(t-\tau_1) = f(t)$

E' triviale il caso $\tau_1 = 0$. Formalmente si ha $f(t+\tau_1-\tau_1) = f(t-\tau_1)$ da cui $f(t) = f(t-\tau_1)$ e quindi $f(t-\tau_1) = f(t)$.

E' di interesse la relazione tra gli elementi $\tau_1 \neq \tau_2$ di P_f dovendo essere verificata la condizione $\tau_2 = \alpha\tau_1$ con $\alpha \in Z$, essendo Z l'insieme dei numeri interi relativi .

In questo caso risulta $\begin{cases} f(t+\tau_1) = f(t) \\ f(t+\alpha\tau_1) = f(t) \end{cases} \Rightarrow f(t+\tau_1+\alpha\tau_1) = f(t)$

Si può anche scrivere $f(t+\tau_1+\alpha\tau_1) = f\big((t+\tau_1)+\alpha\tau_1\big) = f(t+\tau_1) = f(t)$. *Sarebbe verificata la seguente relazione*

$f(t+\tau_1+\cdots+\tau_1) = f(t)$ *o anche*

$f(t-\tau_1-\cdots-\tau_1) = f(t)$ *quando rispettivamente* α *è un intero assoluto (naturale) oppure (secondo caso) quando* $\alpha = -n : n \in \mathbb{N}$.

Per dare un'idea ci si può fermare al caso particolare $\alpha = n = 3$.

Allora risulta che $f(t+\tau_1+\tau_1+\tau_1) = f((t+\tau_1+\tau_1)+\tau_1) = f(t+\tau_1+\tau_1) = f\big((t+\tau_1)+\tau_1\big) = f(t+\tau_1) = f(t)$.

Tali argomentazioni hanno valenza generale. Pare di interesse evidenziare che non è in generale vera la relazione $f(t+\alpha\tau_1) = f(t+\tau_1) = f(t)\ \forall t \in X \equiv dom\, f$ quando $\tau_2 = \alpha\tau_1$ con $\alpha \notin \mathcal{Z}$.

Detta relazione deve essere scissa nelle due seguenti $\begin{cases} f(t+\tau_1) = f(t)\ \forall t \in X \equiv\ dom\, f \\ f(t+\alpha\tau_1) = f(t+\tau_1) \end{cases}_{\substack{|f(t+\tau_1)=f(t)\ \forall t\in X\equiv\ dom\, f \\ |\alpha\notin\mathcal{Z}}}$.

La prima relazione è vera per ipotesi (di periodicità). La seconda non può essere vera in generale quando $\alpha \notin \mathcal{Z}$.

(sviluppare)

Una funzione periodica di particolare importanza è la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ per la quale $t \xrightarrow{f} e^{i\omega t}$ Ai fini della periodicità deve infatti risultare che

$e^{i\omega t} = e^{i\omega(t+T)}$ dove T è il cosiddetto periodo minimo.

In $\mathbb{C}$ è definito l'esponenziale complesso $e^z = e^x(cosy + isiny)$. In questo caso particolare si ha $x = 0$ da cui $e^x = e^0 = 1$ quindi si può porre $y = \omega t$

La funzione coseno è una funzione periodica di periodo minimo 2π . Quindi $cos\ \omega t = \cos(\omega(t + \varphi))$. Quindi $\omega t + \omega\varphi - \omega t = 2\pi$ da cui si ottiene $\omega\varphi = 2\pi$ da cui si ottiene $\varphi = \frac{2\pi}{\omega}$. φ è il periodo minimo. Usando il formalismo che definisce l'insieme P_f si può affermare che $P_f = \left\{\frac{2\pi}{\omega}k\ \forall k \in \mathcal{Z}\right\}$

In altri termini una funzione è periodica se $P_f \neq \{0\}$.

E' sicuramente utile trattare formalmente le *applicazioni limitate.*

Una applicazione $f \in E^X$ è detta limitata se $\forall t\ \in X = dom\ f$ risulta verificata la condizione $\|f(t)\| \leq M \in \mathbb{R}_+$

Se f è una funzione a valori vettoriali tale che $f \in E^X$ si potrà affermare che essa è limitata se e solo se sono limitate tutte le funzioni scalari componenti.

$$\|f(t)\| \leq M \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow |f_i(t)| \leq l_i \in \mathbb{R}_+$$

Assegnata una base ortonormale la formalizzazione delle funzioni limitate è sostanzialmente data dal seguente sistema di diseguaglianze, valide $\forall t\ \in X$

$$\|f(t)\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} f_j(t)e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n}|f_j(t)|\|e_j\| \leq \sum_{j=1}^{n}|f_j(t)|_\infty\|e_j\|$$

Si pone $\|f(t)\|_\infty = \sup_{t\in X}\|f(t)\|$

Sono relativamente banali le seguenti proprietà delle funzioni limitate

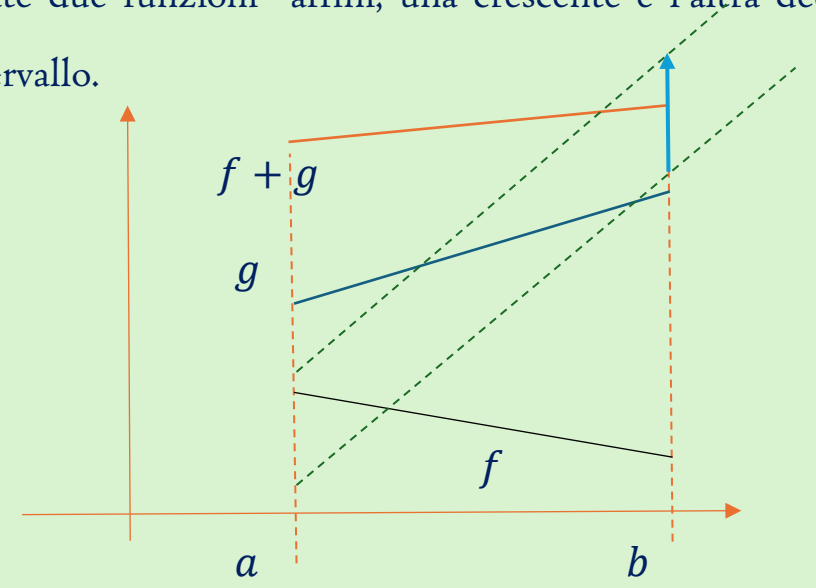
$$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$$

$$\|\alpha f\|_\infty \le \|\alpha\|_\infty\|f\|_\infty$$

Se f e g sono limitate anche $f+g$ è limitata.

La prima dimostrazione può essere esemplificata con riferimento ad un caso specifico di facile rappresentazione grafica. Si consideri un aperto $(a\,,b)$ di $\mathbb{R}$. Si ammettano assegnate due funzioni affini, una crescente e l'altra decrescente, ristrette a detto intervallo.



Sia f la funzione decrescente. Per essa si può porre $\sup_{t\in(a,b)}\|f(t)\| = \lim_{t\to a^+} f(t)$

e $\sup_{t\in(a,b)}\|g(t)\| = \lim_{t\to b^-} g(t)$

La funzione $(f+g)(t)$ è costruibile per punti essendo banalmente $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$

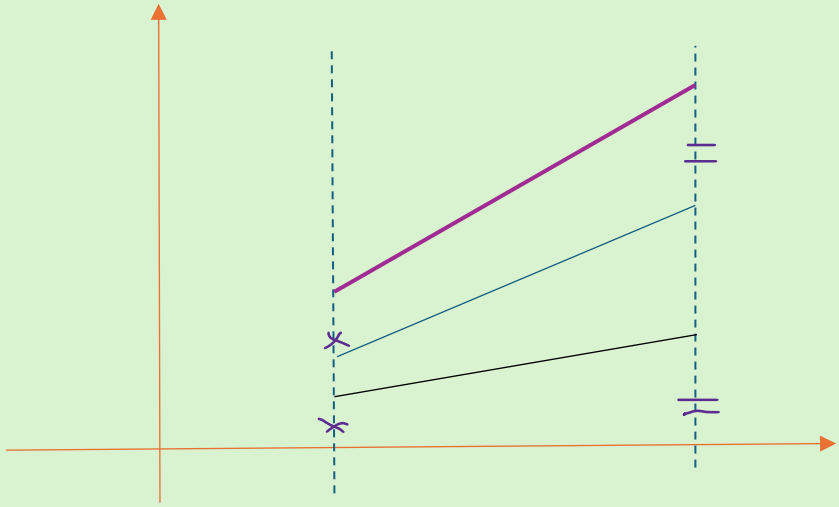
Nel caso concreto la funzione $f+g$ è crescente. Il vettore in blu è eguale a

$$\sup_{t\in(a,b)} \|f(t)\| = \lim_{t\to a^+} f(t)$$

Dalla figura traspare con tutta evidenza che $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Sembra banale il caso per il quale se le due rette sono entrambe crescenti vale la condizione $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ciò si evince con immediatezza dalla seguente rappresentazione grafica.



Un altro caso evidente di eguaglianza stretta è quello per il quale le due funzioni considerate sono costanti in (a,b).

L'insieme delle applicazioni lineari limitate di dominio X ha struttura di spazio vettoriale.

Nei termini più generali occorre dimostrare la diseguaglianza triangolare come più sopra enunciata al fine di evidenziare il carattere di norma della funzione considerata.

Per semplificare le questioni – almeno dal punto di vista formale – si pone

$$\|f(t)\|_\infty = \sup_{t\in X}\|f(t)\| \equiv \langle f(t)\rangle$$

Detta formalizzazione ha significato autonomo non riconducibile al formalismo delle parentesi angolate, variamente utilizzate in matematica.

Così ammettendo, la diseguaglianza data può essere scritta come segue

$$\langle f(t) + g(t)\rangle \leq \langle f(t)\rangle + \langle g(t)\rangle$$

Nella pratica detta relazione va specificata considerando che per le due date funzioni e per la funzione somma delle due date funzioni esistono, nel caso più generale possibile tre distinti $t \in X$ per i quali valga la relazione con specifico riferimento al tipo di norma – dovendo dimostrare proprio che di norma si tratta – in oggetto.

Pertanto detta relazione può essere più opportunamente riscritta dovendo dimostrare che

$$\langle f(t') + g(t')\rangle \leq \langle f(t_1)\rangle + \langle g(t_2)\rangle$$

Ad esempio, la scrittura $\langle f(t_1)\rangle \equiv \|f(t)\|_\infty = \sup_{t\in X}\|f(t)\|$ e quindi $t_1 \in X$ è il punto che rende vera la relazione $\|f(t)\|_\infty = \sup_{t\in X}\|f(t)\|$.

Quindi, $\forall t \in X - \{t_1\}$ risulta verificata la condizione $\|f(t)\| \leq \|f(t_1)\|$

Analogamente si dà senso a $\langle g(t_2)\rangle$ e $\langle f(t') + g(t')\rangle$.

In generale si ha $t' \neq t_1 \neq t_2$.

Sia $\langle f(t') + g(t') \rangle \equiv \|f(t) + g(t)\|_\infty = \sup_{t \in X} \|f(t) + g(t)\|$ nel senso che $t' \in X$ è il punto che invera la relazione data in via di definizione con riferimento al tipo specifico di funzione che si considera.

Si osserva che $f(t')\ e\ g(t')$ possono essere trattati come numeri reali e che sono possibili tre distinte ipotesi $\begin{cases} f(t') + g(t') > 0 \\ f(t') + g(t') = 0 \\ f(t') + g(t') < 0 \end{cases}$. Si potrebbe studiare il sottocaso per il quale sia, ad esempio, $g(t') = 0$.

Gli sviluppi dimostrativi non sembrano dare grande rilevanza a questa casistica particolare per la quale sarebbero, sotto detta condizione, $(g(t') = 0)$, $\begin{cases} f(t') > 0 \\ f(t') = 0 \\ f(t') +< 0 \end{cases}$.

E' immediato rilevare che $\langle f(t') + g(t') \rangle \leq \langle f(t') \rangle + \langle g(t') \rangle$. Basta fare qualche sostituzione con opportuni numeri reali per rendersene conto. Ad esempio se la condizione è verificata per $f(t') = a,\ g(t') = b$ con a e b due numeri reali positivi si ha banalmente una eguaglianza del tipo $(a + b) = a + b$. Si può dare un esempio con $g(t') < 0$ per evidenziare che vale la diseguaglianza stretta $\langle f(t') + g(t') \rangle < \langle f(t') \rangle + \langle g(t') \rangle$.

Per quanto posto risulta (per ipotesi) che $\begin{cases} \langle f(t') \rangle \leq \langle f(t_1) \rangle \\ \langle g(t') \rangle \leq \langle g(t_2) \rangle \end{cases}$

Sommando membro si ha $\langle f(t') \rangle + \langle g(t') \rangle \leq \langle f(t_1) \rangle + \langle g(t_2) \rangle$

Pertanto si ha il seguente sistema di diseguaglianze

$$\langle f(t') + g(t') \rangle \leq \langle f(t') \rangle + \langle g(t') \rangle \leq \langle f(t_1) \rangle + \langle g(t_2) \rangle$$

In definitiva si può scrivere

$$\langle f(t') + g(t') \rangle \leq \langle f(t_1) \rangle + \langle g(t_2) \rangle$$

Decomposizione ortogonale. Teorema di decomposizione.

E' utile considerare uno spazio vettoriale V di dimensione *n* e un suo sottospazio S di dimensione finita $m < n$. *E' immediato scrivere* $x = s + s^{\perp}$ *con s* $\in S$ *e* $s^{\perp} \in S^{\perp}$, *essendo* $S^{\perp}$ *l'ortogonale di S.*

Dal punto di vista metrico si può introdurre la seguente implicazione

$$x = s + s^{\perp} \Rightarrow \|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^{\perp}\|^2$$

La proiezione del vettore x di V nel sottospazio S è

$$s = \sum(x, e_i)e_i$$

E' utile il seguente teorema, detto di approssimazione per il quale

Se x è un elemento di V e di considera un sottospazio vettoriale di V, indicato con S, la proiezione di x su S è un elemento di S. Siano s e t due distinti elementi di S. Il vettore s è la proiezione di x su S se è verificata la condizione

$$\|x - s\| \leq \|s - t\| \quad \forall t \in S : t \neq s$$

La diseguaglianza è stretta quando $t \neq s$. *Per* $t = s$ *risulta ovviamente vero che* $\|x - s\| = \|s - t\|$

E' immediato constatare che $x - t = (x - s) + (s - t) = x - s + s - t = x - t.$

Vale la seguente implicazione $\begin{pmatrix} s \in S \\ t \in S \end{pmatrix} \Rightarrow (s - t) \in S.$ *Infatti S è un(o) (sotto)spazio vettoriale (per ipotesi). Quindi* $\begin{pmatrix} s \in S \\ t \in S \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha s + \beta t) \in S \; \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

$(s - t)$ *corrisponde alla coppia* $(\alpha, \beta) = (1, -1).$

Dalla relazione vettoriale $x - t = (x - s) + (s - t)$ *si ottiene la più utile*

$x - t = s^{\perp} + (s - t)$ *in quanto* $(x - s) = s^{\perp}.$

E' vera la seguente implicazione

$x - t = s^{\perp} + (s - t) \;\; \Rightarrow \|x - t\|^2 = \|s^{\perp}\|^2 + \|s - t\|^2$ *in quanto* $s^{\perp}$ *è un elemento dell'ortogonale di S e* $(s - t)$ *è un elemento di S.*

$$\|x - t\|^2 = \|x - s\|^2 + \|s - t\|^2$$

Poiché $\|s - t\|^2 \geq 0$ *si ha* $\|x - t\|^2 \geq \|x - s\|^2.$

La condizione di eguaglianza si ha solo per $s = t$ *cioè quando* $s - t = 0_S$ *in quanto* $\|0_S\| = 0_{\mathbb{R}}$

Possono risultare utili i due seguenti lemmi.

Siano dati tre elementi di V, x, y, z a due a due ortogonali. Si scrive $x \perp y \perp z$ *nel significato di* $x \perp y \, , x \perp z, y \perp z.$

Risulta che $\varphi(x + y, x + z) = \|x\|^2.$ *Si tratta semplicemente di sviluppare* $\varphi(x + y, x + z)$ *ponendo che* $\varphi(x + y, x + z) = \varphi(x, x) + \varphi(x, z) + \varphi(y, x) + \varphi(y, z) = \varphi(x, x) + 0 + 0 + 0 = \varphi(x, x) = \|x\|^2.$

In termini formali si può scrivere che

$$\varphi(x+y, x+z) = \|x\|^2 \Leftrightarrow\ x \perp y \perp z$$

Siano x , y e z tre elementi di $V^n \sim \mathbb{K}^n$ *(dove* $\sim$ *indica che i due insiemi sono isomorfi)*

Detti elementi sono tali che

$$x_i = \pm 1\ \ \forall i$$

$$z_i = \pm 1\ \ \forall i$$

$$z_i = \pm 1\ \ \forall i$$

con ciò intendendo che ogni componente (coordinata) del vettore può assumere solo i valori 1 oppure -1.

Sono immediate le seguenti rappresentazioni

+	*1*	-1
1	*2*	*0*
-1	*0*	-2

(con riferimento alle somme $x_i + y_i$*)*

+	*1*	-1
1	*2*	*0*
-1	*0*	-2

(con riferimento alle somme $x_i + z_i$*)*

La moltiplicazione $(x_i + y_i)(x_i + z_i)$ *può risultare eguale al valore 0 quando sia*

$(x_i + y_i) = 0$ *quindi, ad esempio, per* $x_i = 1\ \ e\ y_i = -1$. *Non sorgono contraddizioni.*

Una contraddizione sorge per il caso fosse $(x_i + y_i)(x_i + z_i) = -4$.

Infatti, se si pone, per ipotesi, $(x_i + y_i)(x_i + z_i) = -4$ *sarebbe, ad esempio,*

$x_i + y_i = -2$ *da cui* $x_i = y_i = -1$ *ed anche* $x_i + z_i = 2$ *da cui* $x_i = z_i = 1$

Allora, sarebbe vero, situazione assurda, che è al contempo vero che $x_i = 1$ *e* $x_i = -1$

Utilizzazione del formalismo matriciale nello studio delle applicazioni lineari

Sia data un'applicazione lineare $f : V \to W$ tale che dimV= n e dim W= m. In generale $n \neq m$. Sia $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ una base di V e sia $\boldsymbol{\mathcal{B}}$' una base di W.

Si pone $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$.

Il primo step è formalizzare i vettori $f(u_i)$ che mandano un elemento di V – appartenente ad una base di V – in elementi di W. Detti elementi sono combinazioni lineari di vettori della base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$.

Sia dato l'insieme I= $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. $\forall i \in I$ si ha

$f(u_i) = a_{ij}\omega_j$ (in notazione sintetica) con $j \in J = \{1, 2, \dots., m\} \subset \mathbb{N}$.

In forma estesa si ha

$$f(u_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ i=i_0}}^{m} a_{ij}\omega_j$$

Per esempio si ha $f(u_1) = \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{m} a_{1j}\omega_j = a_{11}\omega_2 + a_{12}\omega_2 + \cdots . + a_{1m}\omega_m$

L'insieme – in termini di n – pla ordinata – $(a_{i1}, a_{i2}, \dots . a_{im})$ definisce le coordinate del vettore $f(u_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \dots, w_m)$.

$\forall\ v\ \in V$ data una base di V si ha

$v = x_i u_i$ che in notazione estesa diviene

$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots . + x_n u_n$ da cui $f(v) = f(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots . + x_n u_n) = x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + \cdots . + x_n f(u_n)$ trattandosi, per ipotesi, di una applicazione lineari.

A questo punto è evidente che ci si deve coordinare con le relazioni ottenute in precedenza tenendo considerando quindi le sostituzioni quali la seguente da inserire nell'ultima relazione ottenuta

$$f(u_1) = \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{m} a_{1j}\omega_j = a_{11}\omega_2 + a_{12}\omega_2 + \cdots . + a_{1m}\omega_m$$

Sia $(y_1, y_2, \ldots . y_m)$ la $m - pla$ che definisce le coordinate del vettore $y = f(v)$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$.

Risultano date le seguenti m relazioni scalari

$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots . + a_{1n}x_n$

.....

$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots . + a_{mn}x_n$

Tali relazioni sono compattate in forma matriciale ponendo

$Y = AX$ nella quale le matrici Y e X devono intendersi matrici colonna.

Nelle applicazioni può essere utile servirsi della *matrice di cambiamento di base.*

Sia dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita *n.*

Si considerino le due seguenti basi dello spazio vettoriale V

$(e_1, e_2, \dots., e_n)$ *e* $(e'_1, e'_2, \dots., e'_n)$.

Come è noto, ogni vettore di V – data che sia una base – può essere scritto in unico modo. A distinte basi corrispondono distinte rappresentazioni dello stesso vettore.

Con riguardo a quanto posto si può scrivere

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$$

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \cdots x'_n e'_n$$

In esse $e'_i \neq e_1 \Rightarrow x'_i \neq x_i$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *è la n-pla delle coordinate del vettore x rispetto alla base* $(e_1, e_2, \dots., e_n)$ *mentre* $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ *è la n-pla delle coordinate dello stesso vettore rispetto alla base* $(e'_1, e'_2, \dots., e'_n)$.

Sia e'_i *con* $i \in I = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ *un elemento (componente) della base* $(e'_1, e'_2, \dots., e'_n)$. *Ogni* e'_i *è una combinazione lineare degli elementi della base* $(e_1, e_2, \dots., e_n)$.

Si può ad esempio scrivere che

$$e'_i = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2 + \cdots .. + a_{ni} e_i$$

Da $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \cdots x'_n e'_n$ *sono possibili n sostituzioni in formula inserendo la combinazione lineare corrispondente in luogo di ogni* e'_i

Un esempio in $V^2 \sim \mathbb{R}^2$ *chiarisce operativamente il senso di queste ben note argomentazioni.*

Se $x \in \mathbb{R}^2$ *con immediatezza di significato si può scrivere che*

$$\begin{cases} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 \end{cases}$$

Ma deve altresì risultare vero che

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{cases}$$

Si può pertanto affermare che

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 \xrightarrow{\substack{e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2}} x'_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + x'_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2)$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$x = (x'_1 a_{11} + x'_2 a_{12})e_1 + (x'_1 a_{21} + x'_2 a_{22})e_2$$

Dalla prima rappresentazione del vettore (rispetto alla prima base) si ha

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ *con riferimento a quanto appena trovato si può affermare che*

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 a_{11} + x'_2 a_{12} \\ x_2 = x'_1 a_{21} + x'_2 a_{22} \end{cases}$$

cui corrisponde la seguente rappresentazione matriciale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Tali rappresentazione è interpretabile affermando che dato il vettore $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ *tramite la matrice* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *– detta di passaggio di base – si ottengono le coordinate del vettore rispetto alla base* (e_1, e_2) *quando siano note – come già detto – le coordinate del medesimo oggetto, rispetto alla distinta base* (e'_1, e'_2).

I passaggi considerati per il caso di elementi di $\mathbb{R}^{n=2}$ *con un certo appesantimento possono essere sviluppati e generalizzati al caso* $n > 2$.

Con immediatezza di comprensione si può scrivere

$X = AX'$ *nella quale gli elementi noti sono al secondo membro.*

La matrice quadrata A (si tratta di un passaggio di base) è non singolare, e quindi si ha det A $\neq 0$.

Da $X = AX'$ *pre-moltiplicando per* A^{-1} *(matrice inversa di A) si ha*

$$A^{-1}X = A^{-1}AX' = (A^{-1}A)X' = IX' = X'$$

Pertanto si ha

$$X' = A^{-1}X$$

Questa relazione va intesa che dato X *e data la matrice* A^{-1} *si ottiene* X' *quindi la rappresentazione dello stesso vettore rispetto alla distinta base . Una matrice che ammette inversa (unica) è detta non singolare o regolare.*

In generale le formule di passaggio di base sono

$X = AX'$ *e* $X' = BX$ *essendo A e B due matrici una delle quali è l'inversa dell'altra.*

E' quindi utile introdurre la *matrice associata ad un endomorfismo*. L'applicazione lineare $f : X \to Y$ è un endomorfismo se $Y = X$.

$f : X \to X$ è un endomorfismo. $\forall x \in X$ si ha $f(x) \in X$.

Ad un dato endomorfismo è associata univocamente una matrice non singolare per la quale risulti

$$Y = AX \text{ essendo } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \; e \; Y = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

In questo caso la matrice A è una matrice quadrata, non singolare.

Si può fare un esempio considerando il caso V^3 *, quindi di uno spazio vettoriale di dimensione 3.*

Si può scrivere $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Tale relazione è trattabile algebricamente (in termini di prodotto tra matrici).

Sono date le relazioni di cambiamento di base

$$X = AX'$$

$$Y = DY'$$

Sono immediati i seguenti passaggi formali

$$Y = AX \quad \rightarrow DY' = ACX' \rightarrow D^{-1}DY' = D^{-1}ACX' \rightarrow (D^{-1}D)Y' = D^{-1}ACX' \rightarrow IY' = (D^{-1}AC)X' \rightarrow Y' = A'X'$$

Poiché si tratta di un endomorfismo si può porre $D^{-1} = C^{-1}$ *si ha*

$$Y' = (C^{-1}AC)X'$$

Un endomorfismo iniettivo e suriettivo è detto automorfismo.

Autovalori e autovettori di una applicazione lineare

E' possibile partire dalla nozione di endomorfismo per poi passare alla generalità delle applicazioni lineari.

Dato un endomorfismo $T : V \rightarrow V$ *un* $v \in V : v \neq 0_V$ *è un autovettore rispetto all'autovalore (scalare)* λ *se* $T(v) = \lambda v$

L'insieme $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\,, \lambda \in \mathbb{K}\}$ *dato* $\lambda \in \mathbb{K}$ *è detto autospazio di T rispetto a* λ. *Si tratta di un sottospazio vettoriale di V.*

E' però forse utile partire dalla definizione di spettro di T indicato con sp T

$$sp\ T = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists\, v \in V - \{0_V\} : T(v) = \lambda v\}$$

Per ogni $\lambda \in$ *sp T è definito un insieme* V_λ *detto autospazio di T relativo a* λ

Come già detto l'insieme $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\,, \lambda \in \mathbb{K}\}$ *ha struttura di spazio vettoriale. Per un dato* λ *si considerino due vettori distinti, u e v, che soddisfano la condizione* $\begin{cases} T(v) = \lambda v \\ T(u) = \lambda u \end{cases}$ *Sommando membro a membro si ottiene* $T(v) + T(u) = \lambda v + \lambda u = \lambda(v + u) = T(v + u)$ *coerentemente con la circostanza che T è un operatore lineare.*

In generale $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$

Sia $v \in V : T(v) = \lambda v$. *Si consideri* $T(\alpha v) = \alpha\big(T(v)\big) = \alpha(\lambda v) = \alpha T(v)$

Dall'ipotesi $T(v) = \lambda v$ *si è ottenuta la tesi* $\alpha v \in V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\,, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Ponendo $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *si ottiene* $0_{\mathbb{K}} v = 0_V$. *L'insieme costituito da* 0_V *e da tutti i vettori* $v \in V - \{0_V\}$ *per i quali, per un dato* $\lambda \in \mathbb{K}$, *risulta* $T(v) = \lambda v$ *è uno spazio vettoriale.*

Si ammetta l'ipotesi per la quale $V_\lambda = \{0_V\}$. *In questo caso per un assegnato* λ *non esiste alcun elemento* $v \in V : v \neq 0_V$ *per il quale* $T(v) = \lambda v$. *Quindi in generale è vero che* $T(v) \neq \lambda v$. *Assegnati due distinti elementi di* $V - \{0_V\}$ *si ha che*

$$T(u) + T(v) \neq \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v) \neq T(u + v)$$

Quindi $T(u + v) \neq \lambda(u + v)$

Se $T(v) \neq \lambda v$ *allora* $\forall \varphi \in \mathbb{K}$ *si ha* $\varphi T(v) \neq \varphi \lambda v = \lambda(\varphi v) \neq T(\varphi v)$.

Si ammetta ora che $V_\lambda = \{0_V, v\}$ *essendo* $v \neq 0_V$. *Per quanto ipotizzato si può affermare che* $T(v) = \lambda v$ *e moltiplicando per lo scalare* α *si ha* $\alpha T(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) \Rightarrow T(\alpha v) = \lambda(\alpha v) \Rightarrow \alpha v \in V_\lambda$

E' di tutta evidenza che i vettori $(v, \alpha v)$ *costituiscono al variare di* α *in* $\mathbb{K}$ *coppie di vettori linearmente dipendenti introducendo quindi uno spazio vettoriale* V_λ *di dimensione uno.*

In generale, sia dato uno spazio vettoriale V e siano λ_i *p distinti scalari e siano dati p vettori* v_i *per i quali sia vero che*

$$f(v_i) = \lambda_i v_i \;\; i \in I = \{1, 2, \ldots., p\} \subset \mathbb{N}$$

Occorre dimostrare che detti vettori sono linearmente indipendenti.

Si consideri la seguente somma vettoriale eguagliata a 0.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots . + \lambda_p v_p = 0_V$$

Nel caso triviale $p = 1$ *si ha* $\lambda_1 v_1 = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = 0$ *in quanto* $v_1 \neq 0_V$

Nel caso $p = 2$ *si ha* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V$ *la coppia* $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ *soddisfa la condizione formale del problema. Ma è altresì vero che* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ *con* $\lambda_1 \neq 0$. *In questo caso si avrebbero due vettori linearmente dipendenti.*

Il porre ha $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V$ *equivale a scrivere* $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$. *Sotto questa ipotesi deve essere*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = 0_V \;\Rightarrow_{Hp:\,(v_1, v_2) \neq (0_V, O_V)}\; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$

In definitiva, i vettori (v_1, v_2) *devono essere linearmente indipendenti.*

E' immediato estendere tali considerazioni al caso di p vettori non nulli.

Autovettori e autovalori – Approfondimento

Come è noto, se T è una trasformazione (operatore) lineare dallo spazio V allo spazio W si scrive $T: V \rightarrow W$. *Lo scalare* λ *tale che* $T(x) = \lambda x$ *è detto autovalore di T quando tale relazione è vera per* $x \neq 0_V$. *Detto elemento* $x \neq 0_V$ *è detto autovettore di T rispetto allo scalare* λ.

Se un dato $x \neq 0_V$ *verifica la relazione* $T(x) = \lambda x$ *l'autovalore* λ *è unico.*

Infatti, se si ammette che esista un $\lambda' \neq \lambda$ *per il quale risulti contemporaneamente vero che* $\begin{cases} T(x) = \lambda x \\ T(x) = \lambda' x \end{cases}$ *allora banalmente sarebbe vero che* $\lambda x = \lambda' x$ *e in definitiva sarebbe vero che* $x = \frac{\lambda'}{\lambda} x$ *Formalmente l'eguaglianza ha senso per* $\lambda' = \lambda$. *In questo caso si avrebbe* $x = \frac{\lambda'}{\lambda} x = 1x = x$. *Dal che discende l'unicità contro l'ipotesi* $\lambda' \neq \lambda$.

Se $x \neq 0_V$ *sarebbe* $T(0_V) = \lambda 0_V = 0_W$. *Tale relazione è formalmente vera* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Operativamente la relazione $T(x) = \lambda x$ *sottointende l'unicità di* λ *per un dato* $x \in V - \{0_V\}$. *Siano dati due distinti elementi di V detti, rispettivamente x e y, per i quali sia vero che* $\begin{cases} T(x) = \lambda x \\ T(y) = \lambda y \end{cases}$ *Moltiplicando ambo i membri per la stessa quantità scalare si ottengono le seguenti relazioni* $\begin{cases} \alpha T(x) = \alpha \lambda x \\ \beta T(y) = \beta \lambda y \end{cases}$ *da cui si ottiene* $\begin{cases} T(\alpha x) = \lambda \alpha x \\ T(\beta y) = \lambda \beta y \end{cases}$ *e quindi* $\begin{cases} T(\alpha x) = \lambda(\alpha x) \\ T(\beta y) = \lambda(\beta y) \end{cases}$. *Risulta valida la seguente implicazione*

$$\begin{cases} T(x) = \lambda x \\ T(y) = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(\alpha x) = \lambda(\alpha x) \\ T(\beta y) = \lambda(\beta y) \end{cases}$$ *e più in generale*

$$\begin{cases} T(x) = \lambda x \\ T(y) = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(\alpha x) = \lambda(\alpha x) \\ T(\beta y) = \lambda(\beta y) \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$T(\alpha x) + T(\beta y) = \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y)$$

Ma, poiché per ipotesi si è ammesso che T sia un operatore lineare, allora deve essere vero, per ipotesi, che

$T(\alpha x) + T(\beta y) = T(\alpha x + \beta y)$. *Ciò consente di affermare che* $T(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$. *Pertanto si ha* $\lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$ *per* λ *dato.*

$E(\lambda)$ *– autospazio per* λ *dato – è uno spazio vettoriale.* 0_V *non è un autovettore. Gli autovalori nulli possono invece esistere. Può quindi essere* $\lambda = 0$.

Possono essere fatti molti esempi di operatori. Tra essi vi è l'operatore di integrazione.

Come è noto, l'insieme delle funzioni continue reali nell'intervallo $[a\,, b]$ *di* $\mathbb{R}$ *è uno spazio vettoriale. Se f è una funzione continua in* $[a\,, b]$ *tale che* $a < b$ *può essere definita la seguente applicazione lineare*

$$T(f) = g(x) = \int_a^x f(t)dt \;\; a \le t \le x$$

Diviene rilevante la nozione di autofunzione di T. Una autofunzione è una funzione non nulla per la quale risulta

$$\int_a^x f(t)dt = \lambda f(x)$$

Si ammette che detta funzione esista. La precedente relazione può essere derivata applicando ad ambo i membri l'operatore di derivazione (rispetto alla x) $\frac{d}{dx}$ *avendo che*

$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\lambda f(x)$

Sia F una primitiva di f. Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$\frac{d}{dx}(F(x) - F(a)) = \lambda f'(x)$ *da cui si ottiene*

$\frac{d}{dx}F(x) - \frac{d}{dx}F(a) = \lambda f'(x)$

$\frac{d}{dx}F(x) = \lambda f'(x)$ *in quanto* $\frac{d}{dx}F(a) = 0$ *essendo F(a) una costante.*

In sintesi si può scrivere che f(x)= $\lambda\, f'(x)$

Sovviene un risultato dell'analisi elementare, quello per il quale $f(x) = f'(x)$ *è vero quando sia* $f(x) = e^x$ *. In questo caso sarebbe* $\lambda = 1.$ *Si ammetta più in generale che la funzione candidata sia del tipo* $f(x) = e^{\alpha x}$ *essendo* α *una costante reale. Allora sarebbe verificata la condizione* $e^{\alpha x} = \lambda\alpha e^{\alpha x}$ *dovendo essere formalmente vero che* $\alpha = \frac{1}{\lambda}$*. Pertanto le funzioni candidate sono del tipo* $ce^{\frac{1}{\lambda}x} = ce^{\frac{x}{\lambda}}$ *con* $\lambda \neq 0$ *essendo c una qualunque costante reale non nulla. Se in* $\int_a^x f(t)dt$ *si pone* $x = a$ *si ha*

$\int_a^{x=a} f(t)dt = 0$ *Per sostituzione in formula si avrebbe*

$\int_a^{x=a} f(t)dt = 0 = \lambda ce^{\frac{x}{\lambda}}$

Sorge una contradizione in quanto essendo $\lambda \neq 0, c \neq 0$*, ed essendo* $e^{\frac{a}{\lambda}}$ *mai eguale allo zero reale il secondo membro* $\lambda ce^{\frac{x}{\lambda}}$ *deve essere necessariamente diverso da 0.*

In conclusione, per l'operatore integrale quando f è una funzione non nulla si ha

$T(f) = \lambda f$ *non è mai verificata.*

Come già si è detto, un autovettore genera un sottospazio. Sia T una applicazione lineare e sia λ *un autovalore della trasformazione lineare. Si scrive* $T(x) = \lambda x$ *essendo* $x \neq 0_V$. *Si pone*

$$E(\lambda) = \{x \in V : T(x) = \lambda x\ , \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Si denota con $L(x)$ *l'insieme dei multipli di x al variare di uno scalare. Quindi assegnato un* $x \in V$ *e dato il campo degli scalari* $\mathbb{K}$ *detto insieme è costituto da tutti e soli gli elementi* αx *tali che* x *è un elemento di V e* α *assume ogni possibile valore, quindi al variare di* α *in* $\mathbb{K}$. *Si scrive* $L(x) = \{\alpha x : \ x \in V\ , \forall \alpha \in \mathbb{K}\}$. *Si tratta di un insieme costituito di vettori linearmente dipendenti*

E' di tutta evidenza che si tratta di uno spazio vettoriale. Infatti anche per $x \neq 0_V$ *posto* $\alpha = 0$ *si ha* $\alpha x = 0x = 0_{L(x)} \equiv 0_V$ *. Per distinti scalari si ha*

$\begin{cases} \alpha x \in L(x) \\ \alpha' x \in L(x) \end{cases} \Rightarrow \alpha x + \alpha' x = (\alpha + \alpha')x \in L(x)$ *per la chiusura su* $\mathbb{K}$. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\alpha' \in \mathbb{K}$ *anche* $(\alpha + \alpha') \in L(x)$.

T traforma L(x) in se stesso. Sia $c \in \mathbb{K}$ *e sia* $y = cx$ *. Sono immediati i seguenti passaggi formali*

$$T(y) = T(cx) = cT(x) = c\lambda x = \lambda(cx) = \lambda y$$

Se $cx \neq 0_{L(x)}$ *(quindi se contemporaneamente risulta* $c \neq 0_{\mathbb{K}}$ *e* $x \neq 0_V$*) si ha che*

$$y \neq 0_{L(x)}$$

In progress

Alcune osservazioni per una dimostrazione alternativa della diseguaglianza di C.S.B. e sulla dipendenza lineare di vettori

La diseguaglianza di C.S.B. può essere scritta nella forma

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 \sum_{k=1}^{n}(b_k)^2$$

Il caso $k = 1$ *è triviale e conduce ad una ovvia eguaglianza. Infatti si ha*

$$(a_1 b_1)^2 \leq ((a_1)^2)((b_1)^2)$$

$(a_1 b_1)^2 \leq (a_1 b_1)^2$ *e in definitiva* $(a_1 b_1)^2 = (a_1 b_1)^2$

Se $k \in \{2, 3, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ *e* $b_k = \alpha a_k$ *con* $\alpha \in \mathbb{K}$ *(caso di vettori linearmente dipendenti) si ha il caso della eguaglianza*

Si consideri, ad esempio, il caso $k = 2$*. In questo caso si può scrivere*

$$(a_1 \alpha a_1 + a_2 \alpha a_2)^2 \leq ((a_1)^2 + (a_2)^2)((\alpha a_1)^2 + (\alpha a_2)^2)$$

$\alpha^2(a_1 a_1 + a_2 a_2)^2 \leq ((a_1)^2 + (a_2)^2)\alpha^2((a_1)^2 + (a_2)^2)$ *da cui dividendo per* $\alpha^2 \neq 0$ *si ha*

$$(a_1 a_1 + a_2 a_2)^2 \leq ((a_1)^2 + (a_2)^2)((a_1)^2 + (a_2)^2)$$

$(a_1^2 + a_2^2)^2 \leq ((a_1)^2 + (a_2)^2)^2$ *che in definitiva riconduce al caso della eguaglianza.*

Tale relazione può essere ottenuta per k *qualunque quando i due vettori sono linearmente dipendenti. I vettori* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *e* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ *sono linearmente dipendenti se esiste un* $r \in \mathbb{R}$ *tale che* $b = ra$ *e quindi* $b = ra \Rightarrow (b_1, b_2, \ldots, b_k) = r(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_k)$.

Per quanto posto si ha

$(\sum a_k^2 r)^2 \leq \sum a_k^2 \sum a_k^2 r^2$

$r^2(\sum a_k^2)^2 \leq r^2 \sum a_k^2 \sum a_k^2$

Dividendo per $r^2 \neq 0$ *si ha*

$(\sum a_k^2)^2 \leq \sum a_k^2 \sum a_k^2$ *da cui* $(\sum a_k^2)^2 \leq (\sum a_k^2)^2$ *che è un evidente caso di eguaglianza* $(\sum a_k^2)^2 = (\sum a_k^2)^2$.

Tale dimostrazione è generale $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *quando i due vettori sono linearmente dipendenti.*

E' possibile sviluppare la dimostrazione con riferimento al caso generale per il quale i due vettori non sono linearmente dipendenti. Si può partire dal caso più semplice, quello per il quale si operi in $\mathbb{R}^2$ *considerando il caso di vettori linearmente indipendenti.*

In questo caso la diseguaglianza stretta può essere scritta e trattata come segue:

$(\sum_{k=1}^{2} a_k^2 \lambda_k)^2 < (\sum_{k=1}^{2} a_k^2)(\sum_{k=1}^{2} (a_k \lambda_k)^2)$

La necessità di inserire un indice allo scalare k è una immediata conseguenza del fatto che non esiste uno scalare λ *per il quale si possa scrivere* $b = \lambda a$

Con riferimento al caso $k = 2$ *la precedente diseguaglianza può essere riscritta come segue*

$(a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2)^2 < (a_1^2 + a_2^2)(a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2)$

$a_1^4\lambda_1^2 + 2a_1^2a_2^2\lambda_1\lambda_2 + a_2^4\lambda_2^2 < a_1^4\lambda_1^2 + a_1^2a_2^2\lambda_2^2 + a_2^2a_1^2\lambda_1^2 + a_2^4\lambda_2^2$

$2a_1^2a_2^2\lambda_1\lambda_2 < a_2^2a_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_1^2)$

Dividendo per $a_1^2a_2^2 \neq 0$ *(essendo altresì vero che* $a_1^2a_2^2 > 0$*) si ha*

$2\lambda_1\lambda_2 < \lambda_2^2 + \lambda_1^2$ *da cui si ottiene* $0 < \lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2$ *da cui*

$\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 > 0$

Tale diseguaglianza è sempre verificata per ogni $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *con* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0\ , 0)$.

Infatti $\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 > 0$ *equivale a* $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0$ *sempre verificata in* $\mathbb{R}$.

E' mero esercizio di calcolo algebrico estendere la trattazione al caso di vettori linearmente indipendenti quando si opera in $\mathbb{R}^{n\geq 3}$

Senza che nasca ambiguità nel caso $\mathbb{R}^3$ *si otterranno tre diseguaglianze strette del tipo*

$$2\lambda_1\lambda_2 < \lambda_2^2 + \lambda_1^2$$

$$2\lambda_1\lambda_3 < \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$2\lambda_3\lambda_2 < \lambda_3^2 + \lambda_2^2$$

E' possibile generalizzare a qualunque n ottenendo un certo numero di relazioni del tipo

$$2\lambda_i\lambda_j < \lambda_i^2 + \lambda_j^2 \ \ \forall (i,j) \in I \times I : \ \ i \neq j\ ,\ I = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$$

Tali argomentazioni sono sufficienti a giustificare la diseguaglianza stretta quando i due vettori sono linearmente indipendenti e $\mathbb{R}^{n>1}$.

La relazione x e y sono linearmente dipendenti è una relazione di equivalenza che come tale gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Sia $\mathfrak{d}$ *la relazione in argomento. E' possibile riconoscere la proprietà riflessiva ponendo* $x\mathfrak{d}x$ *in quanto* $x = 1_{\mathbb{K}}x$ *ed anche la proprietà riflessiva* $x\mathfrak{d}y \iff y\mathfrak{d}x$ *in quanto* $x = ky \iff y = k^{-1}x$

Vale altresì la proprietà transitiva potendo scrivere che $\begin{pmatrix} x\mathfrak{d}y \\ y\mathfrak{d}z \end{pmatrix} \Rightarrow x\mathfrak{d}z$.

Valgono altresì ulteriori proprietà formali quali la seguente $x\mathfrak{d}y \Rightarrow \alpha x\mathfrak{d}y$ *anche per* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$

Se k vettori sono a due a due linearmente dipendenti allora la loro somma è un vettore linearmente dipendente e si può scrivere che

$y\mathfrak{d}(x_1 +, \dots + x_p)$ *vera* $\forall y \in \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$

La relazione è vera per ogni possibile combinazione lineare dei vettori di $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. *Si può scrivere che* $y\mathfrak{d}(x_1 +, \dots + x_p) \Rightarrow y\mathfrak{d}(\alpha_1 x_1 +, \dots + \alpha_p x_p)\ \forall(\alpha_1, \dots., \alpha_p) \in \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$

In definitiva, con un ragionamento solo apparentemente contraddittorio si può affermare che l'insieme $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ *di p vettori è costituito da p vettori linearmente dipendenti se esiste uno scalare* $\alpha = \alpha(x_i) :\ x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ *per il quale risulta vero che*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_p = \alpha x_i$$

In altri termini devono esistere $k = dimV$ *per le quali sia vero che*

$$\begin{pmatrix} x_{1\,1} \\ x_{1\,2} \\ x_{1\,3} \\ \dots \\ x_{\ 1\,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{2\,1} \\ x_{2\,2} \\ x_{2\,3} \\ \dots \\ x_{\ 2\,k} \end{pmatrix} + \cdots \begin{pmatrix} x_{p\,1} \\ x_{p\,2} \\ x_{p\,3} \\ \dots \\ x_{\ p\,k} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_{i\,1} \\ x_{i\,2} \\ x_{i\,3} \\ \dots \\ x_{\ i\,k} \end{pmatrix}$$

Per come si è proceduto il primo deponente designa il numero d'ordine del vettore mentre il secondo indice, pure a deponente, denota il numero d'ordine della coordinata nella n-pla ordinata che rappresenta il vettore.

La condizione per la quale i vettori sono linearmente dipendenti è che siano verificate le seguenti k relazioni scalari

$$\frac{x_{1\,j} + x_{2\,j} + \cdots . + x_{p\,j}}{x_{i\,j}} = \alpha \quad \forall\, j \ \in J = \{1, \dots., k\} \subset \mathbb{N} \ : k = dim\, V.$$

α deve risultare identicamente constante.

Se due o più vettori non sono linearmente dipendenti allora sono linearmente indipendenti.

Trasformazioni simmetriche (hermitiane) e trasformazioni antisimmetriche (antihermitiane).

Si ammetta esistente un autovalore λ associato ad un autovettore x non nullo di V. Vale la seguente relazione che consente di esprimere un autovalore λ in termini di rapporto tra prodotti scalari.

In particolare risulta vero che $\lambda = \frac{(T(x)\,,x)}{(x\,,x)}$. Ciò discende immediatamente dalla definizione di autovalore e di autovettore.

Infatti, si ha $\lambda = \frac{(\lambda x\,,x)}{(x,x)} = \frac{\lambda(x,x)}{(x,x)} = \lambda$ che da coerenza a $\lambda = \frac{(T(x)\,,x)}{(x\,,x)}$.

Risulta altresì' vero che $\bar{\lambda} = \frac{(x\,,T(x))}{(x\,,\ x)} = \frac{\bar{\lambda}(x,x)}{(x\,,x)} = \bar{\lambda}$

In entrambi i casi la divisione per $(x\,,x)$ è conseguente al fatto che $(x\,,x) \neq 0$ in quanto $x \neq 0_V$.

Sia dato uno spazio euclideo E, cioè uno spazio vettoriale di un prodotto scalare. Sia E un $\mathbb{C}-$spazio vettoriale. Una trasformazione lineare $T : V \to E$ è detta hermitiana su V se

$\forall\ (x, y) \in V \times V$ si ha $(T(x), y) = (x, T(y))$

Se E è un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale e vale la relazione $(T(x), y) = \big(x, T(y)\big)\ \forall\ (x, y) \in V \times V$ l'operatore lineare T detto simmetrico.

Se E è un $\mathbb{C}$ −spazio vettoriale l'operatore T è detto antihermitiano se

$\forall\,(x,y)\in V\times V$ si ha $(T(x),y)=-(x,T(y))$

Occorre ora approfondire il caso della simmetria hermitiana quindi della condizione $(T(x),x)=(x,T(x))$

Se si ammette che sia $\lambda=\bar{\lambda}$ si ottiene $\frac{(T(x)\,,x)}{(x\,,x)}=\frac{(x\,,\ T(x))}{(x\,,\ x)}$ da cui, moltiplicando ambo i membri per $(x\,,\ \ x)\neq 0$ si ottiene

$(x\,,x)\frac{(T(x)\,,x)}{(x\,,x)}=(x\,,x)\frac{(x\,,\ T(x))}{(x\,,\ x)}$ *da cui si ricava la condizione di simmetria*

$(T(x),x)=(x,T(x))$

Ma $\lambda=\bar{\lambda}\Rightarrow\lambda\in\mathbb{R}$

In definitiva $\lambda\in\mathbb{R}\iff(T(x),x)=(x,T(x))\ \forall x\in V-\{0_V\}\ :T(x)=\lambda x$

(x è un autovettore rispetto a λ*). V è un* $\mathbb{R}$ *−spazio vettoriale.*

Si imponga ora vigente la simmetria antihermitiana, quindi sia vera la relazione

$(T(x),x)=-(x,T(x))$

Risulta vero che $(\lambda x,x)=-(x\,,\lambda x)\Rightarrow\lambda(x,x)=-\bar{\lambda}(x,x)$ *Al solito si può dividere per* (x,x) *ottenendo* $\lambda=-\bar{\lambda}$ *. Detta eguaglianza non può essere mai vera in* $\mathbb{R}$*. Infatti, coordinandosi si dovrebbe arrivare ad affermare che un numero reale è eguale al suo opposto !. Neppure i numeri del tipo* $a+ib$ *con* $(a\,,b)\in\mathbb{R}-\{0\}\times\mathbb{R}-\{0\}$ *possono essere soluzioni del problema. Infatti sarebbe vero che*

$$a+ib=-\overline{a+\imath b}=-(a-ib)=-a+ib$$

Si avrebbe il caso assurdo che $(a\,,b)$ *e* $(-a,b\,)$ *sono lo stesso numero complesso.*

Il problema ammette soluzioni del tipo $(0\ ,b)$ *al variare di b in* $\mathbb{R}$.

$$(T(x),x) = -(x,T(x)) \Leftrightarrow\ \lambda = -\bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \{(0,b): b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

Si può riflettere sulle definizioni date, partendo dal caso della simmetria hermitiana per la quale

$$(T(x),y) = \big(x,T(y)\big)$$

Si può ammettere verificata la condizione data e considerare i seguenti passaggi

$$(T(x),y) = \big(x,T(y)\big)\ \Rightarrow (\lambda_1 x,y) = (x,\lambda_2 y) \Rightarrow \lambda_1\ (x,y) = \overline{\lambda_2}\ (x,y)$$

Se $(x,y) \neq 0$ *cioè quando x ed y non sono ortogonali risulta* $\lambda_1\ = \overline{\lambda_2}$ *quindi* $\lambda_1\ = \overline{\lambda_2} = \lambda \in \mathbb{R}$ *. Ciò è immediato se* (x,y) *è un numero reale.*

Si pone il problema di considerare il caso che i vettori x e y siano ortogonali. In questo caso risulta $(x,y) = 0$ *. Da* $T(x) = \lambda x$ *si ottiene che* $(x,y) = 0 \Rightarrow (\lambda x,y) = 0$. *Infatti i vettori x e* λx *sono paralleli ed essendo* $x \perp y$ *risulta pure* $y \perp \lambda x$. *I vettori x e* λx *sono collineari.*

Se $y \perp \lambda x$ *allora* $(\lambda x,y) = 0$ *. Anche in questo caso particolare (vettori ortogonali) è possibile applicare la proprietà di linearità considerando due vettori* $y_1\ e\ y_2$ *tra di loro ortogonali e tali che* $y = y_1 + y_2$.

Ciò posto si può scrivere che

$$(\lambda x,y) = (\lambda x,y_1 + y_2) = (\lambda x,y_1) + (\lambda x,y_2) = \lambda(x,y_1) + \lambda(x,y_2) = 0$$

In definitiva $(\lambda x,y) = 0 \Rightarrow\ \lambda(x,y_1) = -\lambda(x,y_2)$ *quando* $y = y_1 + y_2$.

Analoghe considerazioni, mutatis mutandis, possono essere fatte con riferimento a $(x,\lambda y) = 0$ *ottenendo che* $(x,\lambda y) = 0 \Rightarrow\ \overline{\lambda}(x,y_1) = -\bar{\lambda}(x,y_2)$ *quando* $y = y_1 + y_2$.

Se vale la simmetria hermitiana cioè se $(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = 0$ *deve essere vero che* $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Un problema sembra porsi con riferimento all'ipotesi nella quale si ammetta vigente la simmetria antihermitiana con riferimento al caso specifico di vettori ortogonali. In questo caso, fermo restando l'impianto di quanto già dimostrato deve, per ipotesi, risultare vero che

$$(\lambda x, y) = -(x, \lambda y)$$

Sviluppando le argomentazioni già fatte con riferimento al caso della simmetria antihermitiana, ora in esame si ha

$$(\lambda x, y) = -(x, \lambda y) \Rightarrow \lambda(x, y_1) + \lambda(x, y_2) = -\overline{\lambda}(x, y_1) - \bar{\lambda}(x, y_2)$$

Si impone anche in questo caso $\lambda = -\overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \{(0, b): b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, *come deve essere*

Tali argomentazioni sottendono l'ovvia osservazione che un vettore ortogonale ad un altro vettore può essere scomposto, in infiniti modi, secondo due direzioni ortogonali tra di loro – salvo, ovviamente, il caso che una direzione sia coincidente con la direzione dell'altro vettore ortogonale (per ipotesi) a quello scomposto secondo la regola del parallelogramma di Newton.

Determinazione della condizione di ortogonalità. Sia T una trasformazione hermitiana o antihermitiana. Siano x e y due distinti vettori per i quali risulti

$$T(x) = \lambda x$$

$$T(y) = \mu y$$

con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *con* $\lambda \neq \mu$

Si considerino i due distinti prodotti scalari

$$(T(x), y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$(x, T(y)) = (x\,, \mu y) = \bar{\mu}(x\,, y)$$

Si ammetta T sia un operatore hermitiano. Allora si ha $\lambda(x\,, y) = \bar{\mu}(x\,, y)$ *da cui si ha*

$$\lambda(x\,, y) = \bar{\mu}(x\,, y) = \mu(x, y).$$

Risulta $\bar{\mu} = \mu$ *in quanto la simmetria è hermitiana. Quindi* $(\lambda\,, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *con* $\lambda \neq \mu$*. Sotto queste condizioni l'eguaglianza è garantita dall'annullamento del prodotto, quindi dalla condizione* $(x, y) = 0$ *espressione della ortogonalità dei due vettori considerati.*

Può quindi essere esplorata la condizione antihermitiana. In questo caso si può scrivere che:

$$(T(x), y) = (\lambda x\,, y) = \lambda(x\,, y)$$

$$(x, T(y)) = (x\,, \mu y) = \bar{\mu}(x\,, y)$$

da cui occorre ammettere (per ipotesi) sia

$(T(x), y) = -(x, T(y))$ *e quindi*

$$\lambda(x\,, y) = -\bar{\mu}(x\,, y)$$

Il numero μ *deve essere immaginario, quindi del tipo* ib*. Pertanto si hanno i seguenti passaggi formali* $-\bar{\mu} = -\overline{ib} = -\bar{\imath}\,\bar{b} = -(-i)b = ib = \mu.$

Pertanto trova giustificazione la seguente successione di passaggi

$$\lambda(x\,, y) = -\bar{\mu}(x\,, y) = \mu(x\,, y)$$

Posto $\lambda \neq \mu$ *la condizione* $\lambda(x\,, y) = \mu(x\,, y)$ *impone* $(x\,, y) = 0.$

$$\left(\begin{array}{c|c} (T(x), y) = \lambda(x\,, y) & \lambda(x\,, y) = -\bar{\mu}(x\,, y) \\ (x, T(y)) = \bar{\mu}(x\,, y) & \lambda(x\,, y) = \bar{\mu}(x\,, y) \\ \lambda \neq \mu & \end{array}\right) \Rightarrow (x\,, y) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$$

In generale se $(x\ ,y)$ *è reale l'aver imposto la condizione di simmetria impone l'eguaglianza* $\lambda(x,y) = \bar{\lambda}\ (x,y)$ *che impone* $\lambda = \bar{\lambda}$ *numero reale.*

Poiché $(x\ ,y)$ *è reale l'aver imposto la condizione di antisimmetria impone l'eguaglianza* $\lambda(x,y) = -\bar{\lambda}\ (x,y)$ *da cui* $\lambda = -\bar{\lambda}$ *. In questo caso si hanno due possibili soluzioni* $\lambda = 0_{\mathbb{R}}$ *e* λ *immaginario. Esse non sono compatibili.*

Si consideri ora uno spazio euclideo complesso nel quale il prodotto scalare è un numero complesso per il quale valgono le condizioni della simmetria hermitiana per le quali

$(x,y) = \overline{(y,x)}$ *e* $(x,cy) = \bar{c}\ (x,y)$

Più rigorosamente gli elementi x e y sono elementi dello spazio $\mathbb{C}^n$ *. Un generico elemento di esso, per esempio x , viene rappresentato come una n – pla ordinata di numeri complessi. Si pone* $x = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ *dove ogni elemento di essa è del tipo* $z_i = a_i + ib_i$ *con* $(a_1, b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si ammetta, per ipotesi, che sia $(x,y) = a + ib$ *e si ipotizzi sia data (per ipotesi) la simmetria hermitiana* $\lambda(x,y) = \bar{\lambda}\ (x,y)$. *Si avrebbe* $\lambda(x,y) = \bar{\lambda}\ (x,y) \Rightarrow \lambda(a+ib\ ) = \bar{\lambda}\ (a+ib\ ) \Rightarrow \lambda a + i\lambda b = \bar{\lambda}a + i\bar{\lambda}b \Rightarrow \lambda a - \bar{\lambda}a = i\bar{\lambda}b - i\lambda b \Rightarrow a(\lambda - \bar{\lambda}) = ib(\bar{\lambda} - \lambda)$. *Si ipotizzi sia* $\lambda = u + iv$ *con* $u \neq 0\ , v \neq 0$.

In questo caso l'ultima eguaglianza sarebbe tale che

$a(\lambda - \bar{\lambda}) = ib(\bar{\lambda} - \lambda) \Rightarrow a(u + iv - i - (-iv)) = ib(u - iv - u - iv) \Rightarrow 2a(iv) = -2ib(iv) \Rightarrow a = ib$ *esito palesemente assurdo.*

Se $\lambda = ib$ *si hanno i seguenti passaggi*

$a(\lambda - \bar{\lambda}) = ib(\bar{\lambda} - \lambda) \Rightarrow a(ib - \bar{ib}) = ib(\bar{ib} - ib)$.

Osservo che posto $\mu = (ib - \imath\bar{b})$ *allora si ha* $(\imath\bar{b} - ib) = -\mu$ *e sarebbe quindi possibile scrivere la seguente successione di implicazioni*

$a(\lambda - \bar{\lambda}) = ib(\bar{\lambda} - \lambda) \Rightarrow a(ib - \imath\bar{b}) = ib(\imath\bar{b} - ib) \Rightarrow a\mu = -ib\mu \Rightarrow a = -ib$ *esito altrettanto assurdo.*

L'unico caso che non conduce a contraddizione è quello per il quale $\lambda \in \mathbb{R}$.

La simmetria hermitiana dà ragione anche del fatto che $(x\ , x) \in \mathbb{R}$ *. Infatti, ammesso che valga, per definizione,* $(x, y) = \overline{(y, x)}$ *, se si ipotizza che* $x = y$*, si ha*

$(x, x) = \overline{(x, x)}$ *e si impone che sia* $(x, x) = a + ib$ *sarebbe vero che* $a + ib = \overline{a + \imath b} = a - ib$ *, eguaglianza palesemente assurda. Ad analoga contraddizione si giunge anche nel caso sia* $(x, x) = ib, b \in \mathbb{R}$. *Non resta che concludere che* $(x, x) = \in \mathbb{R}$. *Infatti, solo in* $\mathbb{R}$ *un numero e il coniugato di esso coincidono.*

Si consideri a titolo di esempio il caso concreto $(\ .\ ) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{K}$ *con riferimento al caso concreto* $x = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2\ , a_3 + ib_3\ )$ *a seguito del quale di può scrivere che*

$(x\ , x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{x}_\imath = (a_1 + ib_1)\overline{(a_1 + \imath b_1)} + (a_2 + ib_2)\overline{(a_2 + \imath b_2)} + (a_3 + ib_3)\overline{(a_3 + \imath b_3)} = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 + b_i^2 \in \mathbb{R}$

La relazione hermitiana di simmetria è coerente in quanto– ragionando in $\mathbb{C}^n -$ *si può scrivere, con netta evidenza di significato, che*

$(\ x, y) = a + ib = \overline{(y, x)} \Rightarrow (y, x) = \overline{(x, y)} = a - ib \Rightarrow \overline{\overline{(x, y)}} = \overline{a - \imath b} \Rightarrow (\ x, y) = a + ib$

Nei passaggi precedenti si è inteso $(x, y) \equiv \varphi(x, y)$ *– modalità inequivoca.*

In definitiva $\varphi(x,y) = a + ib \Leftrightarrow \varphi(y,x) = a - ib$ *con* $(x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$

Occorre ora trattare il caso di uno spazio euclideo complesso $\mathbb{C}^n$ *introducendo un operatore T antihermitiano, cioè tale che, comunque si prendano due elementi distinti, x e y di* $\mathbb{C}^n$ *, risulti verificata la relazione*

$$(T(x), y) = -(x, T(y))$$

Si consideri il caso particolare $x = y$ *in vigenza della antisimmetria hermitiana.*

Si può affermare che $(T(x), y) = -\big(x, T(y)\big) \Rightarrow (\lambda x, x) = -(x, \lambda x) \Rightarrow \lambda(x,x) = -\bar{\lambda}\,(x,x)$ *. Poiche* $(x,x) \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$ *si può scrivere* $\lambda = -\bar{\lambda}$ *verificata quando* $\lambda \in \{(0\,, b) \in \{0\} \times \mathbb{R}\}$ *. Si è ipotizzato* $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$.

L'esempio dello spazio delle funzioni reali continue nell'intervallo chiuso $[a,b]$ *di* $\mathbb{R}$.

Siano f e g due distinte funzioni continue in detto intervallo della retta reale. Si ammette quindi che $f \in C(a,b)$ *e* $g \in C(a,b)$ *.*

Viene definito un prodotto scalare ponendo $(f\,, g) \equiv \int_a^b f(t)g(t)dt$

Ciò posto, considerando un operatore lineare T possono essere definito il seguente prodotto scalare

$$(f\,, T(g)) \equiv \int_a^b f(t)T(g)(t)dt$$

Si intende che T trasforma g secondo lo schema $g \overset{T}{\rightarrow} T(g)$

La condizione di simmetria viene declinata ponendo

$$(f\,, T(g)) = (T(f)\,, g)$$

$$\int_a^b f(t)T(g)(t)dt = \int_a^b T(f(t))(g)(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)T(g)(t)dt - \int_a^b T\big(f(t)\big)(g)(t)dt = \int_a^b \big[f(t)T(g)(t) - T\big(f(t)\big)(g)(t)\big]\,dt$$ *(questo ultimo passaggio giustificato dalla linearità dell'integrale definito).*

La condizione di antisimmetria presuppone sia $(f\ , T(g)) = -(T(f)\ , g)$ *da cui*

$$\int_a^b \big[f(t)T(g)(t) + T\big(f(t)\big)(g)(t)\big]\,dt$$

Sia assegnato lo spazio della funzioni continue $C(a,b)$. *Siano f e g due funzioni di funzioni continue* $C(a,b)$. *Sia p una distinta funzione data di* $C(a,b)$. *Sia data l'applicazione lineare per la quale sia* $f \overset{T}{\rightarrow} T(f)$ *tale che* $T(f) = pf$. *Risulta che*

$$f \overset{T}{\rightarrow} T(f) = pf$$

Occorre verificare se l'operatore considerato è simmetrico oppure antisimmetrico. Si ammetta per ipotesi che detto operatore sia simmetrico. Allora sono veri i seguenti passaggi:

$$(f\ , T(g)) = (T(f)\ , g) \Rightarrow \int_a^b f(t)T(g)(t)dt = \int_a^b T(f(t))(g)(t)dt \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(t)(pg)(t)dt = \int_a^b (pf)(t))(g)(t)dt$$

Tale eguaglianza discende dal fatto che il prodotto delle tre funzioni è tale che

$$f(pg) = (pf)g = pfg$$

E' anche vero che $\forall x \in [a,b]$ *si ha* $f(x)\big(p(x)g(x)\big) = \big(p(x)f(x)\big)g(x)$ *identicamente.*

Occorre, quindi, considerare l'operatore di derivazione in V sottospazio di $C(a,b)$. *V contiene tutte e sole le funzioni che hanno derivata continua in* $(a\ ,b)$ *e che hanno condizione al contorno* $f(a)=f(b)$. *L'operatore di derivazione che associa alla funzione f la propria derivata prima* f' *è un operatore antisimmetrico.*

Poiché si gestisce il tutto considerando due distinte funzioni le funzioni che hanno derivata continua in $(a\ ,b)$ *si deve porre che sia altresì verificata per entrambe la stessa condizione al contorno sia cioè vero che* $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)$.

Sotto queste condizioni si dimostra che l'operatore di derivazione è una operatore antisimmetrico. Solitamente in luogo della lettera T per detto operatore viene utilizzata la lettera D risultando utili i seguenti passaggi

$$(f\ ,D(g))=-(D(f)\ ,g)$$

$$\int_a^b f(t)D(g)(t)dt=-\int_a^b D(f(t))(g)(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt+\int_a^b f'(t)(g)(t)dt=0$$

$$\int_a^b[f(t)g'(t)+f'(t)g(t)]dt$$

E' facilmente riconoscibile nella scrittura della funzione integranda l'espressione della formula di Leibnitz della derivata del prodotto di due funzioni.

Infatti, è noto che $(fg)'=f'g+g'f$

Pertanto il precedente integrale definito può essere scritto, con sostituzione in formula, come segue

$$\int_a^b[f(t)g'(t)+f'(t)g(t)]dt=\int_a^b\big(f(t)g(t)\big)'dt=f(b)g(b)-$$

$f(a)g(a)=0$ *in considerazione delle condizioni al contorno introdotte.*

Determinazione degli autovalori e degli autovettori di un endomorfismo. Diagonalizzazione.

Sia data una applicazione $f : V \rightarrow V$ e sia data una base di V indicata con $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Sia dim V= n. Sia dato un autovettore v relativo all'autovalore λ . Sia X la matrice colonna delle coordinate di v rispetto alla base B.

Sotto queste condizioni si può scrivere $\lambda X = AX$ o anche, equivalentemente, che $AX = \lambda X$ da cui $AX - \lambda X = 0$ da cui si ottiene

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Trattasi dell'espressione matriciale di un sistema di n equazioni in n incognite.

Detto sistema ammette autosoluzioni se e solo se

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & \\ & & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Gli elementi della diagonale principale sono del tipo $a_{ii} - \lambda$ *mentre gli altri termini hanno una rappresentazione canonica del tipo* a_{ij} *con* $i \neq j$ *essendo i deponenti riferiti, come avviene solitamente, alla riga e alla colonna rispettivamente.*

Detto determinante può essere sviluppato ad ottenere una equazione di grado n .

Il numero λ *è un autovalore se e solo se* $det(A - \lambda I) = 0$ *. Tale equazione è detta equazione caratteristica dell'endomorfismo.* $det(A - \lambda I)$ *è detto polinomio caratteristico di f.*

Nota 1 – Osservazione sulla coimplicazione dei passaggi

Come è noto, e ciò avviene anche nella risoluzione delle equazioni, si ammette vera la seguente coimplicazione

$$ta = tb \iff a = b$$

Detta coimplicazione equivale alle due seguenti implicazioni

$$ta = tb \Rightarrow a = b$$

$$a = b \Rightarrow ta = tb$$

In termini sintetici si può scrivere che

$$(ta = tb \iff a = b\ ) \iff \begin{pmatrix} ta = tb \Rightarrow a = b \\ a = b \Rightarrow ta = tb \end{pmatrix}$$

Al riguardo si può osservare che $ta = tb \Rightarrow a = b$ *presuppone sia* $t \neq 0$. *Infatti da* $ta = tb$ *(vera per ipotesi) si ha – dividendo per* $t \neq 0$, *che* $\frac{t}{t}a = \frac{t}{t}b$ *da cui la tesi per la quale si ha* $a = b$.

Il passaggio inverso presuppone vera l'eguaglianza $a = b$. *In questo caso non è necessaria la restrizione* $t \neq 0$. *Infatti risulta* $ta = tb$ *vera per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *ivi compreso il valore* $t = 0$.

Pertanto la coimplicazione deve ritenersi vera in quanto l'implicazione $a = b \Rightarrow ta = tb$ *è sempre verificata e quindi anche verificata per i valori di t (tra i quali lo zero reale non può comparire) che verificano l'implicazione* $ta = tb \Rightarrow a = b$.

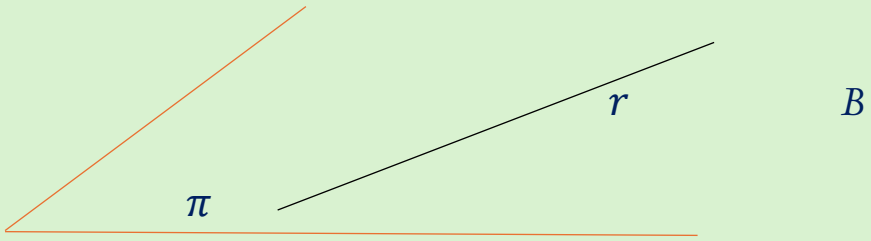
In concreto, quando si gestiscono calcoli algebrici, l'ipotesi $ta = tb$ *è assunta come ipotesi per un particolare* $t_0 \neq 0$

Nota 2 – Formalizzazione del semipiano i geometria affine

Nella sua Geometrie, Jean Marie Monier, riporta una definizione formalizzata di semipiano affine, sia con riferimento al caso di semipiano aperto che di semipiano chiuso.

Ferma restando la correttezza della definizione ivi proposta, è possibile introdurre la seguente serie di argomentazioni che paiono più intuitive.

E' infatti noto dalla geometria elementare che una retta euclidea divide il piano affine in due parti dette semipiani. Il piano π *è diviso in due semipiani* σ_1 *e* σ_2 *come nella figura seguente.*



Il piano π *è diviso in due semispazi di cui la retta* r *è la frontiera. Se* σ_1 *è uno dei due semipiani e se* $r \in \sigma_1$ *si dirà che* σ_1 *è un chiuso. Si tenga comunque conto che detto semispazio è "illimitato". Ciò che conta ai fini della definizione è l'appartenenza (chiuso) o meno (aperto) della data retta r al semipiano che si considera.*

Ciò che mi pare di interesse è evidenziare come tale definizione sia di fatto connaturata alla nozione di riferimento affine del piano.

La retta r è un dato del problema. Si ammette che $r \in \sigma_1$ *sia quindi* σ_1 *un chiuso.*

Se si ammette dato un sistema di riferimento affine ortonormale l'equazione della retta è data nella forma usualmente nota

$$y = \alpha x + b$$

In geometria è usuale mettere l'equazione della retta nella forma

$$\alpha y + \beta x + \gamma = 0 \text{ con } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Ordinariamente i due sempiani possono essere descritti dalle disequazioni seguenti

$\begin{cases} \sigma_1 : \alpha y + \beta x + \gamma \leq 0 \\ \sigma_2 : \alpha y + \beta x + \gamma > 0 \end{cases}$ *quando* σ_1 *è un chiuso.*

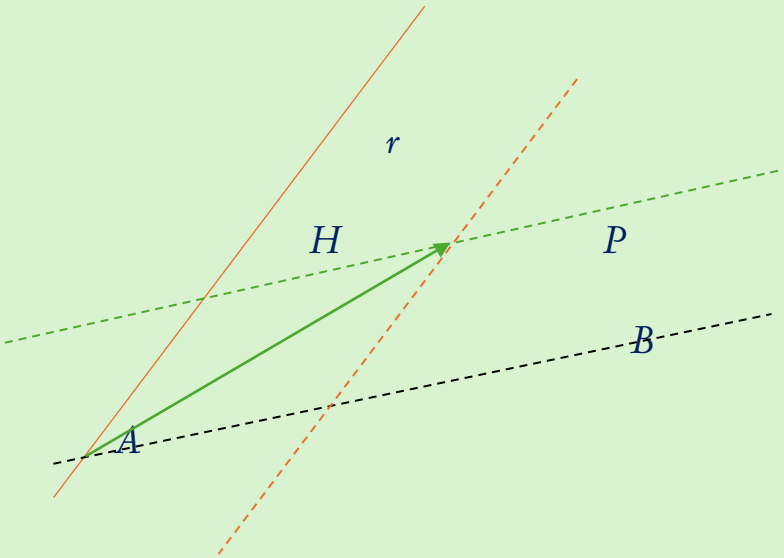
Con riferimento alla figura il punto B – un qualunque punto di σ_1 *– è, ovviamente, tale che B* $\in \sigma_1$ *e in generale* $B \notin r$ *(ben potendo come caso particolare . trattandosi di un chiuso nel senso più sopra ricordato che sia al contempo* $\begin{cases} B \in \sigma_1 \\ B \in r \end{cases}$.

Tale specificazione non rileva nel caso sia σ_1 *un aperto.*

Assegnata la retta r essa bipartisce i punti del piano in due insiemi rispetto ai quali valgono le seguenti relazioni insiemistiche $\begin{cases} \sigma_1 \cup \sigma_2 = \pi \\ \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset \end{cases}$ *tenendo altresì conto che* $r \in \sigma_i \Leftrightarrow r \notin \sigma_j$

$\forall (i, j): i \neq j, i, j \in I = \{1, 2\}$

Una conveniente ed in sostanza equivalente rappresentazione della precedente è data dalla seguente figura



Sia $A \in r$ *un qualunque punto di r. B è un qualunque punto di* σ_1 *. Per i dati qualunque punti – sotto le condizioni poste – passa, come è noto, una ed una sola retta. In particolare* $B \in \sigma_1$ *deve intendersi come qualunque punto di* $\sigma_1 : B \notin r.$

E' stato di fatto istituito un sistema di riferimento affine (A, $\big((H-A)(B-A)\big)$ *dove si è posto* $\underset{AB}{\rightarrow} = B - A.$

In generale le rette considerate, come nel caso rappresentato, non sono ortogonali né la base è costituita da versori (vettori di norma unitaria).

Si consideri quindi il vettore $AB = B - A$. *Sia* $H \in r$ *distinto da A.*

Un qualunque $P \in \sigma_1$ *può essere posto nella forma*

$$AP = \omega AH + \varphi AB$$

E' di tutta evidenza il vincolo $\varphi \geq 0 \ \ (\varphi \in \mathbb{R}_0^+)$. *A contrariis* $\varphi < 0 \iff P \notin \sigma_1$.

Il caso $\varphi = 0$ *è ammesso e risulta* $AP = \omega AH + \varphi AB = \omega AH + 0AB = \omega AH$

Detti vettori sono collineari e pertanto è il caso nel quale P (qualunque) è tale che $P \in r$.

Vale l'immediata coimplicazione $(\omega = \varphi = 0) \Leftrightarrow A \equiv P \ \ \forall A \in r$

Evidentemente per quanto posto la condizione $\varphi < 0$ *conduce alla implicazione*

$$\varphi < 0 \Rightarrow P \notin \sigma_1$$

La conseguente formalizzazione del semipiano che si propone è di fatto la seguente

$$P \in \sigma_{1\ |r\in\pi} \Leftrightarrow AP = \omega AH + \varphi AB \ \left| \begin{pmatrix} A, H \ \in r \\ B \notin r : B \in \sigma_1 \\ (\omega, \varphi) \in \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0^+ \end{pmatrix} \right.$$

Pertanto da un punto di vista insiemistico si può scrivere

$$\sigma_{1\ |r\in\pi} = \{P \in \pi : \ AP = \omega AH + \varphi AB \ \ \forall\, (\omega, \varphi) \in \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0^+, A, H \ \in r, B \notin r : B \in \sigma_1 \ \}$$

Il punto B è ricavato all'uopo considerando la coppia $(\omega, \varphi) \equiv (0, 1)$

Anche la soluzione proposta nel testo citato presuppone $B \notin r : B \in \sigma_1$

L'orientamento della retta r non appare rilevante. Ai fini degli sviluppi di interesse è l'orientamento, assunto come convenzionale, della retta passante per A e per B essendo essi due punti qualunque ma condizionati dall'appartenenza, come per il punto A, o meno, come nel caso del punto B, alla retta r che intuitivamente definisce il semipiano σ_1 .

Con riferimento alle condizioni poste relativamente all'ordinamento il semipiano (aperto) σ_2 *può essere formalizzato come segue*

$\sigma_{2\ |r\in\pi} = \{P' \in \pi :\ AP' = \omega' AH + \varphi' AB'\ \forall\ (\omega', \varphi') \in (\mathbb{R}_0 - \{0\}) \times \mathbb{R}^-, A, H\ \in r, B' \notin r : B' \in \sigma_2\ \}$

Nota 3 – Diseguaglianza triangolare

E' sicuramente istruttivo la modalità dimostrativa della diseguaglianza triangolare contenuta nel testo di Analisi matematica I di Bramanti, Salsa e Pagani. E' possibile modificarne l'iter dimostrativo nei termini che seguono, ferma restando l'osservazione per la quale

$\forall\ x\ \in \mathbb{R}$ *si ha* $-|x| \leq x \leq |x|$ *di cui è facile convincersi facendo due sostituzioni in formula con numeri negativi e numeri positivi. Per esempio se* $x = 3$ *si ha*

$-|x| \leq x \leq |x| \Leftrightarrow -|3| \leq 3 \leq |3|$ *che conduce al caso evidente* $-3 < 3 = 3$.

Posto $x = -2$ *si ha* $-|-2| \leq -2 \leq |-2|$ *da cui* $-2 = -2 < 2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases}$$

Sommando membro a membro i due sistemi di diseguaglianze si ha

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Risulta di stretto interesse la diseguaglianza

$$x + y \leq |x| + |y|$$

In $\mathbb{R}$ *sono possibili due ipotesi mutamente esclusive* $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$

Se $x + y \geq 0$ *si può banalmente porre* $x + y = |\ x + y|$ *. Pertanto, se* $x + y \geq 0$ *si ha* $x + y \leq |x| + |y|$ *(ipotesi) che è vero anche – per sostituzione in formula – che* $|x + y| \leq |x| + |y|$

Pertanto $x + y \leq |x| + |y| \iff |x + y| \leq |x| + |y|$ *quando* $x + y \geq 0$

Deve però essere considerato il caso $x + y < 0.$

Al riguardo occorre dimostrare che vale l'implicazione $\begin{pmatrix} x + y \leq |x| + |y| \\ \Updownarrow \\ -(x + y) \leq |x| + |y| \end{pmatrix}$

La formalizzazione della tesi $-(x + y) \leq |x| + |y|$ *è ponibile nella forma*

$-x - y \leq |x| + |y|$ *(sempre vera)*

Essa infatti può essere "pensata" come il risultato di una somma membro a membro in quanto

$\begin{pmatrix} -x - y \leq |x| + |y| \\ \Updownarrow \\ \begin{pmatrix} -x \leq |x| \\ + \\ -y \leq |y| \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ *Ma* $-x - y = -(x + y) = |x + y|$ *quando* $x + y \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

Aggiornamento al 19 giugno 2025.

Nota legale – Il testo redatto senza scopo di lucro può essere divulgato a condizione che venga citato l'autore e il soggetto diffusore dell'opera. E' fatto divieto di utilizzo del testo con finalità di implementazione di forme di intelligenza artificiale.

MATHEMATICAL ANALYSIS AND GEOMETRY

pubblicazione a cura di Pascal McLee

MCLEE CONSULTING

2025 © mclee consulting | web solutions. all rights reserved.

www.pascalmclee.com - pas.meli@gmail.com - +39 335 685 6486